ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 12 MAI 1919.

PRÉSIDENCE DE M. LÉON GUIGNARD.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. **Émile Picard** informe l'Académie que, sur l'invitation de la Section des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, la Conférence interalliée des Académies scientifiques, agissant comme Conseil international de recherches, se réunira à Bruxelles les 16 juillet prochain et jours suivants.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur la mesure des classes de formes quadratiques, ternaires et positives, de déterminant donné.* Note de M. G. **Humbert**.

1. *Objet de la Note.* — Eisenstein ([1]) et Stephen Smith ([2]) ont fait connaître des formules simples pour exprimer la mesure (ou densité) de l'ensemble des classes quadratiques ternaires, positives et proprement primitives, ayant des *invariants*, Ω et Δ, donnés; il était naturel de chercher à en déduire la mesure de l'ensemble des classes analogues pour lesquelles le *déterminant*, $\Omega^2\Delta$, est donné. Stephen Smith ne semble pas s'être préoccupé de ce problème; Eisenstein s'est contenté, dans l'avertissement mis en tête de la Table numérique qu'il a publiée au tome 41 du *Journal de Crelle*, de donner, sans démonstration, des formules applicables seulement à des cas particuliers et dont il ne ressort aucune loi simple; c'est qu'en effet, comme

---

([1]) *Journal de Crelle*, t. 35.

([2]) *Phil. Transactions*, 1867, et *Œuvres*, t. 1, p. 506. — Voir aussi Bachmann, *Arithm. des formes quadratiques*, p. 196.

nous le verrons plus bas, la formule générale se présente sous une forme assez compliquée. Mais si, en partant de cette formule, on s'inspire d'une méthode de Dirichlet, on voit les résultats se simplifier et l'on arrive à une proposition assez élégante, relative à la mesure des classes, *primitives ou non*, de déterminant donné.

2. *Formule initiale.* — D'après Stephen Smith, la mesure de l'ensemble des classes ternaires, positives et proprement primitives, d'invariants Ω et Δ *impairs*, est la suivante

$$(1)\qquad M(\Omega,\Delta)=\frac{\Omega\Delta}{24}(2-\lambda)\Pi_r\left[1-\frac{1}{r^2}\right];$$

r désignant tout nombre premier, supérieur à 1, divisant à la fois Ω et Δ; quand à λ, il se calcule ainsi : soit posé $\Omega=\Omega_1\omega^2$, $\Delta=\Delta_1\delta^2$, où ω^2 et δ^2 sont les plus grands carrés divisant Ω et Δ; soit (Ω, Δ) le plus grand commun diviseur de Ω et Δ; on prend $\lambda=\frac{1}{\Omega_1\Delta_1}$, ou $\lambda=0$, selon que $\Omega_1\Delta_1$ est premier ou non à (Ω, Δ).

Pour en déduire la mesure, $\mathfrak{M}(D)$, des classes proprement primitives de *déterminant impair* D, il suffit de faire la somme des quantités $M(\Omega, \Delta)$, pour toutes les valeurs positives entières de Ω, Δ, vérifiant la relation $\Omega^2\Delta=D$.

Prenons d'abord, au second membre de (1), le terme indépendant de λ; il donne, dans $\mathfrak{M}(D)$, le terme $\mathfrak{M}_1(D)$, défini par

$$(2)\qquad \mathfrak{M}_1(D)=\frac{2D}{24}\sum\frac{1}{\Omega}\prod_r\left(1-\frac{1}{r^2}\right).$$

Soit posé, en mettant les facteurs premiers en évidence,

$$D=p^\alpha p'^{\alpha'}\ldots,\qquad \Omega=p^\rho p'^{\rho'}\ldots,\qquad \Delta=p^{\alpha-2\rho}\ldots\qquad \left(0\leq\rho\leq\frac{\alpha}{2},\ \ldots\right).$$

On voit aisément que, au second membre de (2), la somme Σ se met sous la forme d'un *produit*, portant sur les p, p', ...; le facteur de ce produit qui correspond au facteur p est le suivant :

1° α *impair*. Alors ρ va de 0 à $\frac{\alpha-1}{2}$, et le facteur cherché est

$$1+\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^{\frac{\alpha-1}{2}}}\right],$$

le terme 1 étant celui qui correspond à $\rho = 0$. Si l'on somme la progression géométrique, l'expression précédente prend la forme

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{\frac{1}{2}(\alpha+1)}} - \frac{1}{p^{\frac{1}{2}(\alpha+3)}}.$$

2° α *pair*. Alors ρ va de 0 à $\frac{\alpha}{2}$, et l'on trouve, par un calcul semblable, l'expression

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{\frac{1}{2}(\alpha+2)}}.$$

On a dès lors, en supposant $D = p^\alpha p'^{\alpha'} \ldots$,

$$(3) \qquad \mathfrak{M}_1(D) = \frac{D}{12} \prod_p \left[1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \mu_\alpha \right],$$

μ_α étant égal à $p^{-\frac{1}{2}(\alpha+2)}$, si α est pair, et à $p^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} + p^{-\frac{1}{2}(\alpha+3)}$, si α est impair.

Considérons maintenant, au second membre de (1), le terme en λ; il donne, dans $\mathfrak{M}(D)$, le terme $\mathfrak{M}_2(D)$ défini par

$$(4) \qquad \mathfrak{M}_2(D) = -\frac{D}{24} \sum_{\rho, \rho', \ldots} \frac{1}{p^\rho p'^{\rho'} \ldots} \lambda \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{p'^2}\right) \cdots$$

Si $\rho = 0$ ou $\frac{\alpha}{2}$, le facteur $\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$ doit être remplacé par 1; quant à λ, on peut l'écrire, d'après sa définition,

$$\lambda = \frac{l}{p^h} \frac{l'}{p'^{h'}} \cdots,$$

l étant 1 ou 0, selon que $\Omega_1 \Delta_1$ et (Ω, Δ) ne contiennent pas ou contiennent simultanément le facteur p, et p^h étant la plus haute puissance de p qui figure dans $\Omega_1 \Delta_1$.

Il résulte de là que la somme Σ qui figure au second membre de (4) est un *produit* portant sur les $p, p', \ldots$, et dans lequel nous allons chercher le facteur qui correspond à p.

1° α *impair*. Si ρ est pair, Ω_1 ne contient pas p et Δ_1 le contient à la puissance *un*; (Ω, Δ) le contient, sauf si $\rho = 0$. Dès lors l est nul, sauf si $\rho = 0$; h est alors égal à 1, d'où le terme *unique* $\frac{1}{p}$. Si ρ est impair, on a toujours 0.

2° α *pair*. On est conduit à distinguer deux sous-cas, $\alpha = 4\beta$ et $\alpha = 4\beta + 2$, et l'on examine successivement ρ pair et ρ impair.

Dans le premier sous-cas, on trouve, pour le facteur qui correspond à p,

$$1 + \frac{1}{p^{2\beta}} + \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \ldots + \frac{1}{p^{2\beta-2}}\right);$$

et dans le second,

$$1 + \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \ldots + \frac{1}{p^{2\beta}}\right) + \frac{1}{p^{2\beta+2}},$$

c'est-à-dire *dans les deux cas* $1 + \frac{1}{p^2}$.

On a donc, étant toujours posé $D = p^\alpha p'^{\alpha'} \ldots$,

$$(5) \qquad \mathfrak{M}_2(D) = -\frac{D}{24} \prod_p \begin{cases} \dfrac{1}{p} & \text{si } \alpha \text{ impair}, \\ 1 + \dfrac{1}{p^2} & \text{si } \alpha \text{ pair}. \end{cases}$$

$\mathfrak{M}_1(D)$ et $\mathfrak{M}_2(D)$ étant alors donnés par (3) et (5), on écrira

$$(6) \qquad \mathfrak{M}(D) = \mathfrak{M}_1(D) + \mathfrak{M}_2(D);$$

ce qui est la formule assez compliquée dont nous avons parlé plus haut.

3. *Formule définitive*. — Considérons maintenant toutes les classes *ternaires positives*, *proprement primitives*, *de déterminant impair*, et choisissons, par classe, *une* forme : par exemple, la *réduite unique* R correspondante

$$R = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + 2b'zx + 2byz;$$

soit k le nombre de ses transformations en elle-même, linéaires, à coefficients entiers et de déterminant $+1$; le déterminant est

$$aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2,$$

ce que nous écrirons plus brièvement $aa'a'' + \ldots$.

Cela posé, considérons la somme (où s désigne une constante)

$$(7) \qquad \mathbf{S}\,\frac{1}{k}\,\frac{1}{[aa'a'' + \ldots]^s}$$

étendue à toutes les réduites R.

Dans cette somme, un terme M^{-s}, où M est un entier positif, impair, donné, figure avec un coefficient égal à la *mesure* des classes positives, proprement primitives, de déterminant M, c'est-à-dire avec le coefficient $\mathfrak{M}(M)$.

On a donc une équation dont le premier membre est la somme (7), et dont le second est la somme

$$(8) \qquad \sum \frac{1}{M^s} \mathfrak{M}_1(M) + \sum{}' \frac{1}{M^s} \mathfrak{M}_2(M),$$

étendue aux valeurs entières, positives, impaires de M.

Prenons d'abord, dans (8) la première somme, $\sum$, *multipliée par* 12. Remplaçant M par p^α, $p'^{\alpha'}$, ..., on la met sous forme de produit, portant sur *tous* les nombres premiers *impairs*, p, p', ...; pour le terme qui répond à p, on trouve, en partant de (3) et supposant successivement $\alpha = 2\beta$ et $2\beta + 1$, l'expression

$$1 + \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2\beta(s-1)}} \left[1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{\beta+1}}\right] + \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{1}{p^{(2\beta+1)(s-1)}} \left[1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{\beta+1}} - \frac{1}{p^{\beta+2}}\right],$$

c'est-à-dire, après sommation des progressions géométriques,

$$\left(1 - \frac{1}{p^{3s}}\right) : \left(1 - \frac{1}{p^{s-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{2s-1}}\right).$$

Dès lors, la somme $\sum$, dans (8), a pour expression

$$(9) \qquad \sum = \frac{1}{12} \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^{3s}}}{\left(1 - \frac{1}{p^{s-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{2s-1}}\right)},$$

le produit étant étendu à *tous* les nombres premiers p' impairs (supérieurs à 1).

On opérera de même sur la seconde partie, $\sum'$, de (8), en utilisant (5); le calcul est plus simple et conduit, pour $\sum'$, à l'expression

$$(10) \qquad \sum{}' = -\frac{1}{24} \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^{3s}}}{\left(1 - \frac{1}{p^{s}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{2s-2}}\right)}.$$

Transformant les seconds membres de (9) et (10) d'une manière bien connue, on trouve

$$\sum + \sum{}' = \frac{1}{12} \frac{\sum \frac{1}{n^{s-1}} \sum \frac{1}{n^{2s-1}}}{\sum \frac{1}{n^{3s}}} - \frac{1}{24} \frac{\sum \frac{1}{n^s} \sum \frac{1}{n^{2s-2}}}{\sum \frac{1}{n^{3s}}};$$

n, dans ces nouvelles sommes $\sum$, parcourant *tous* les entiers *positifs impairs*.

Égalant maintenant cette dernière expression à la somme (7) et chassant le dénominateur $\sum n^{-3s}$, on obtient la relation finale

$$24 \mathbf{S} \frac{1}{k} \frac{1}{(AA'A'' + \ldots)^s} = 2 \sum \frac{1}{n^{s-1}} \sum \frac{1}{n^{2s-1}} - \sum \frac{1}{n^s} \sum \frac{1}{n^{2s-2}}.$$

Au premier membre, la somme porte sur toutes les réduites $Ax^2 + \ldots$ ternaires, positives, de déterminant impair, *primitives ou non*, mais *propres*, c'est-à-dire que A, A', A'', B, B', B'' peuvent avoir un facteur impair commun, mais A, A' et A'' ne sont pas pairs simultanément. Cette introduction des formes non primitives provient de ce que, après la multiplication par $\sum n^{-3s}$, les $a, a', \ldots, b''$ sont remplacés par $na, na', \ldots, nb''$, où n est *impair*.

Quant à k, il désigne évidemment encore le nombre des transformations (linéaires, de déterminant $+1$) de la forme $Ax^2 + \ldots$ en elle-même.

Au second membre enfin, n parcourt tous les entiers positifs *impairs*.

4. *Corollaire*. — Égalons, dans les deux membres de la relation précédente, les coefficients des termes en D^{-s}, où D désigne un entier positif impair quelconque; nous voyons que :

La mesure de l'ensemble des classes ternaires positives, primitives ou non, mais propres, de déterminant impair donné, D, *est égale à* $\frac{1}{24} \Sigma (2nn' - n'^2)$, *la somme* Σ *s'étendant aux décompositions en facteurs* $D = nn'^2$, *où* n *et* n' *sont entiers et positifs.*

On reconnaît aisément que cette règle est d'accord avec les règles particulières formulées par Eisenstein (*Crelle*, t. 41, p. 152) pour la mesure des classes *primitives* : par exemple, si D n'est divisible par aucun carré (autre

que 1), les décompositions nn'^2 se réduisent à une seule, $D = D.1^2$, et la mesure ci-dessus est $\frac{1}{24}(2D-1)$; or, en ce cas, toutes les classes de déterminant D sont proprement primitives, et Eisenstein indique précisément, pour leur mesure, le nombre $\frac{1}{24}(2D-1)$.

Même vérification de la formule donnée par Eisenstein dans le cas de $D = q^3$, où q désigne un nombre premier impair, etc.

Soit enfin $D = 81$; les classes, primitives ou non, de ce déterminant sont, outre les classes proprement primitives pour lesquelles les Tables numériques d'Eisenstein indiquent la mesure 138 : 24, les classes proprement primitives de déterminant 3, après multiplication des coefficients par 3. Pour ces classes, les Tables donnent la mesure 5 : 24. Au total, la mesure visée dans notre Corollaire est donc $\frac{143}{24}$.

Or les décompositions nn'^2 de 81 sont

$$81 = 81.1^2 = 9.3^2 = 1.9^2,$$

d'où, pour $\Sigma(2nn' - n'^2)$, la somme :

$$(2.81 - 1) + (2.9.3 - 9) + (2.9 - 81),$$

qui est bien 143.

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur les tourbillons d'une veine fluide.* Note de M. L. Lecornu.

Beltrami a recherché en 1889 (*Rendiconti del reale Istituto lombardo*) s'il est possible que, dans le mouvement d'un fluide, les lignes de flux, c'est-à-dire les courbes partout tangentes aux vitesses, coïncident avec les lignes de tourbillon et il a fourni divers exemples permettant de répondre affirmativement. Il a cité, entre autres, la solution suivante, qui est applicable à un tuyau cylindrique. Soient u, v, w les composantes de la vitesse en un point et α, β, γ celles du tourbillon, l'axe du tuyau étant pris pour axe des z. En appelant r la distance à cet axe, k une constante, Z une fonction arbitraire de z et du temps, et posant

$$u = -ky, \qquad v = kx, \qquad w = \sqrt{Z - 2k^2r^2},$$

on trouve

$$\frac{\alpha}{u}=\frac{\beta}{v}=\frac{\gamma}{w}=\frac{k}{\sqrt{Z-2k^2r^2}}.$$

La coïncidence des deux genres de lignes se trouve ainsi réalisée. Elles appartiennent à des cylindres de révolution autour de l'axe des z.

Beltrami a fait voir aussi que si, comme nous le supposerons désormais, le mouvement est permanent, en sorte que les lignes de flux ne diffèrent pas des trajectoires, le rapport λ existant entre le tourbillon et la vitesse varie, le long de chaque trajectoire, proportionnellement à la densité. Cette propriété, déduite par lui d'un calcul assez compliqué, résulte immédiatement de ce que, pour chaque filet de trajectoires, on a, en appelant σ la section du filet, ρ la densité, V la vitesse et Ω le tourbillon, les deux équations

(1) $\rho V\sigma =$ const. (équation de continuité),

(2) $\Omega\sigma =$ const. (propriété connue des tourbillons).

Enfin, on doit également à Beltrami la remarque que la permanence d'un mouvement dans lequel la fonction $H=\frac{V^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}$ (où p désigne la pression, supposée dépendre uniquement de la densité) a partout la même valeur exige que, s'il y a des tourbillons, les lignes de tourbillon se confondent avec les trajectoires.

Ceci rappelé, considérons une veine sortant, à l'état permanent, d'un réservoir dans lequel le fluide demeure sensiblement en équilibre, et supposons les pertes de charge négligeables. La fonction H est, on le sait, constante sur chaque trajectoire. Comme, à l'intérieur du réservoir, elle a partout même valeur, nous nous trouvons précisément dans le cas envisagé par Beltrami. Il est vrai que l'absence de tourbillons dans le réservoir devrait, d'après le théorème de Lagrange, entraîner leur absence dans la veine. Mais, dans le réservoir, les vitesses ne sont qu'approximativement différentes de zéro, et, dès lors, rien ne s'oppose à ce qu'il existe également, dans ce réservoir, des tourbillons très lents prenant ensuite, dans la veine, des valeurs appréciables. On peut même affirmer que, si les tourbillons ne sont pas rigoureusement nuls dans le réservoir, ils deviennent importants dans la veine, au même titre que les vitesses, puisque le rapport $\lambda=\frac{\Omega}{V}$ varie, sur chaque filet, comme la densité, laquelle demeure supérieure à une limite non nulle. La facilité bien connue avec laquelle naissent des tour-

billons au contact d'un fluide avec une paroi porte d'ailleurs à croire que l'absence absolue de tourbillons dans le réservoir est, pratiquement, irréalisable.

Nous sommes ainsi conduits à dire que le genre de mouvement permanent étudié par Beltrami, loin de présenter un caractère exceptionnel, doit être celui que possède toute veine sortant d'un réservoir.

Il est à noter que le rapport λ est entièrement défini par la forme des trajectoires. Si l'on désigne en effet par a, b, c les cosinus directeurs de la tangente à la trajectoire, au point de coordonnées x, y, z, on a

$$u = a\mathrm{V}, \qquad v = b\mathrm{V}, \qquad w = c\mathrm{V},$$

d'où

$$2\alpha = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{V}\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) + c\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} - b\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}$$

et deux équations analogues en α, β, γ. Formant alors la combinaison

$$2(\alpha a + \beta b + \gamma c),$$

puis remplaçant α, β, γ par $\lambda \mathrm{V} a$, $\lambda \mathrm{V} b$, $\lambda \mathrm{V} c$, il vient

$$(3) \qquad 2\lambda = a\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) + b\left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) + c\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right).$$

V a disparu, ce qui établit la proposition.

L'équation (3) montre que λ s'annule chaque fois que les trajectoires sont normales à une suite continue de surfaces. C'est ce qui arrive, en particulier, pour une veine parcourant un tuyau de révolution, quand les trajectoires sont situées dans les plans méridiens et symétriquement distribuées autour de l'axe. Si cette circonstance se présentait, la veine serait dépourvue de tourbillons et, comme nous avons dit plus haut qu'il y a toujours des tourbillons, nous devons conclure que jamais les trajectoires circulant symétriquement dans un pareil tuyau ne sont situées dans les plans méridiens.

Nous pouvons ajouter que la symétrie du mouvement autour de l'axe entraîne, pour chaque trajectoire, la constance du moment de la vitesse par rapport à cet axe, car on sait que, dans un mouvement doué d'une pareille symétrie, le moment de la vitesse est constant pour chaque ligne de tourbillon, confondue ici avec une trajectoire.

La quantité figurant au second membre de l'équation (3) a une signification géométrique qui a été jadis signalée par Joseph Bertrand, et qui est la suivante : à partir du point considéré M, portons deux longueurs égales

et infiniment petites $MM' = MM'' = \varepsilon$ dans deux directions perpendiculaires à la tangente MT à la trajectoire et perpendiculaires entre elles. Soient i', i'' les angles que forment respectivement avec les plans M'MT, M''MT les tangentes en M' et M'' aux trajectoires passant par ces deux points. La quantité dont il s'agit est égale à $\frac{i'-i''}{\varepsilon}$.

Dans un étranglement de la veine, tel que celui qui se produit au col d'une tuyère, on peut admettre que tous les filets présentent un minimum de section. Comme le rapport λ varie proportionnellement à la densité, il présente ou non en cet endroit un minimum, suivant que la vitesse du son ne se trouve pas ou se trouve atteinte (je signale en passant que dans le paragraphe final de ma Note du 10 mars *Sur l'écoulement des fluides*, on lit au sujet de la densité précisément le contraire : le reste de la Note montre bien qu'il y a là un lapsus). De son côté, la vitesse V possède ou non un maximum à la traversée du col suivant qu'elle n'atteint pas ou qu'elle atteint la vitesse du son. Pareille distinction ne s'applique pas au tourbillon Ω : car, d'après l'équation (2), cette quantité varie toujours en raison inverse de σ, et, par suite, possède toujours un maximum au passage du col.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Action des métaux divisés sur les vapeurs de pinène.* Note (¹) de MM. **Paul Sabatier, Alph. Mailhe** et **G. Gaudion**.

L'action d'une température élevée sur les vapeurs de pinène a été l'objet d'études assez nombreuses. Berthelot, en les faisant passer dans un tube chauffé au rouge, a obtenu un grand nombre d'hydrocarbures, parmi lesquels il a caractérisé le benzène, le toluène, le métaxylène, la naphtaline, l'anthracène (²).

Schultz, qui se servait d'un tube en fer, a obtenu les mêmes produits et a constaté en outre la présence de phénanthrène et de méthylanthracène (³).

En opérant également dans un tube en fer, mais à température moins élevée atteignant à peine le rouge visible, Tilden a constaté la formation de gaz riche en hydrogène chargé de vapeurs de pentène ou de pentadiène.

(¹) Séance du 5 mai 1919.

(²) Berthelot, *Ann. Chim. Phys.*, 3ᵉ série, t. 39, 1858, p. 5, et 4ᵉ série, t. 16 1869, p. 165.

(³) Schultz, *Berichte*, t. 10, 1877, p. 114.

4000$^{cm^3}$ de pinène lui ont donné 2775$^{cm^3}$ de liquide. La différence, qui représentait environ 30 pour 100 du pinène traité, correspondait à la formation des produits gazeux et des matières goudronneuses déposées dans le tube. Ce liquide, qui bouillait depuis 30° jusqu'au delà de 200°, est inactif sur la lumière polarisée : ses portions les plus volatiles sont constituées par des carbures C^5H^8, tels que l'*isoprène*.

Le reste est formé de divers hydrocarbures aliphatiques, surtout non saturés, de terpènes inactifs isomères du pinène et bouillant au-dessus de 170°, et enfin de carbures aromatiques, benzène, toluène, xylène et surtout cymène : l'ensemble de ces derniers représentait environ 15,5 pour 100 du volume primitif du pinène ([1]). Il s'y trouvait en outre une certaine proportion de polyterpènes, tels que le colophène, provenant d'une polymérisation du pinène. Une température plus haute diminuait la dose des hydrocarbures les plus volatils, et accroissait celle des gaz.

On pouvait prévoir que l'intervention de catalyseurs déshydrogénants tels que les métaux divisés devait faciliter la destruction des vapeurs de pinène en abaissant la température nécessaire, et, sans doute, en modifiant dans une certaine mesure les conditions du dédoublement. Nos essais ont porté sur le cuivre, le nickel, le cobalt et le fer.

Le *pinène* mis en œuvre a été obtenu par fractionnement d'une essence de térébenthine française, en ne retenant que les portions passant de 156° à 158° : il donnait au polarimètre, dans le tube de 1 décimètre, une rotation de — 32°12′ à 15°; sa densité était 0,87, ce qui donne $\alpha_D = -36°8'$.

Les vapeurs de pinène dirigées au travers d'un tube de verre contenant une traînée de métaux réduits de leurs oxydes, maintenus à la température de 350°, ne donnent lieu à aucun dégagement gazeux, mais se condensent en un liquide moins volatil que le pinène primitif, passant à la distillation de 156° jusqu'à 230° : il est presque entièrement composé de *terpènes* isomères du pinène, contenant une petite quantité de *polyterpènes*. Nous aurons l'honneur de revenir sur la nature de ces isomères ainsi que sur les conditions de l'isomérisation.

Mais si la température du métal est plus haute, on observe un dégagement gazeux dont l'importance varie beaucoup selon la température et la nature du métal catalyseur.

Action du cuivre. — Nous avons employé un cuivre très léger de couleur

---

([1]) Tilden, *Ann. Chim. Phys.*, 6e série, t. 5, 1885, p. 120.

violacée obtenu en réduisant, par l'hydrogène à température peu élevée, l'hydrate noir tétracuivrique (¹).

Le cuivre étant maintenu à 500°, l'adduction des vapeurs de pinène procure un dégagement abondant de gaz très éclairant, qui contient beaucoup d'hydrogène et des carbures éthyléniques. On condense un liquide verdâtre dont un fractionnement soigné permet d'isoler, pour 100^{cm^3} :

8^{cm^3}	passant	au-dessous de 120°
5,9	»	de 120° à 150°
76,1	»	de 150° à 185°
10	»	au-dessus de 185°

La portion la plus abondante 47^{cm^3},8, qui passe de 165° à 175°, ne donne plus, dans un tube de 0^m,1, qu'une rotation de — 6°.

Une température de 600°-630° conduit à une transformation plus avancée. En amenant très lentement les vapeurs de pinène, on obtient un dégagement gazeux plus intense entraînant des fumées difficiles à condenser.

Le liquide obtenu est de couleur ambrée et dégage une odeur pénétrante. 462^{cm^3} de pinène ont fourni 374^{cm^3} de liquide : la perte qui correspond aux gaz dégagés, aux produits condensés et aux matières goudronneuses imprégnant le cuivre, atteignait 88^{cm^3}, soit 19,1 pour 100.

Le liquide, soumis à un fractionnement attentif, fournit pour 81 volumes, provenant de 100 volumes de pinène primitif :

Fractions.	Volumes.	Températures.	Après SO^4H^2.
A	13,3	au-dessous de 95°	1,0
B	27	de 95° à 150°	10,1
C	31,4	de 150° à 185°	19
D	9,3	au-dessus de 185°	1,3
	81,0		31,4

Ces diverses portions ont été successivement traitées, en évitant autant que possible l'élévation de température, par l'acide sulfurique concentré qui dissout les carbures éthyléniques et diéthyléniques, ainsi que les carbures cyclohexéniques et les terpènes, et n'attaque que très faiblement les carbures aromatiques.

Les volumes des résidus obtenus par ce traitement suivi d'un lavage à la

(¹) Paul Sabatier, *La Catalyse en chimie organique*, p. 106.

soude et à l'eau, sont indiqués dans la colonne de droite du Tableau ci-dessus. Ces résidus étaient d'ailleurs presque entièrement solubles dans le mélange sulfonitrique qui les changeait en dérivés nitrés : ce sont des carbures aromatiques, ne renfermant que de faibles traces de carbures forméniques ou cyclohexaniques.

La fraction A, bouillant de 30° à 95°, ne contient que des doses minimes de *benzène* et de *toluène*. Elle absorbe une forte proportion de brome; mise au contact de sodium métallique, elle donne, après quelque temps, une certaine dose de carbure solide mou translucide; ce qui y indique la présence d'*isoprène* ou de *pipérylène* dans des proportions qui ne dépassent pas 15 pour 100 ; ils y sont associés à des carbures éthyléniques, amylènes, hexènes.

La portion B, passant de 95° à 150°, incolore comme les fractions A et C, a une densité de 0,849 à 12°, et un pouvoir rotatoire sensiblement nul : elle est constituée par un mélange d'hydrocarbures éthyléniques et diéthyléniques, avec un peu plus d'un tiers de carbures aromatiques, *toluène*, et surtout *métaxylène* (qui bout à 139°, densité 0,871) : une partie de ce dernier est dissous dans l'attaque par l'acide sulfurique, ce qui diminue la proportion du résidu trouvé.

La fraction C qui est la plus abondante ne possède qu'un pouvoir rotatoire tout à fait négligeable; elle est constituée en majeure partie par des carbures aromatiques, surtout du *cymène* (qui bout à 175°), avec du *cumène* et du *méthyléthylbenzène*, et par des *terpènes* issus de l'isomérisation du pinène, bouillant soit au voisinage de 170°, soit au-dessus de 180°

La portion D qui est verdâtre comprend, à côté de polyterpènes, des carbures éthyléniques ou diéthyléniques très condensés sans proportions appréciables de carbures aromatiques.

La dose totale de carbures aromatiques formés à 600°-630°, sous l'action du cuivre, est donc voisine de 31, pour 100 de pinène traité.

Des essais industriels effectués vers 550° sur plusieurs tonnes d'essence de térébenthine, à l'aide d'un catalyseur à cuivre moins actif que celui employé plus haut, ont conduit à une formation d'environ 21 pour 100 de carbures aromatiques, transformables en produits nitrés.

On voit que l'emploi du cuivre comme catalyseur accroît d'une manière très notable la proportion des carbures aromatiques fournis par le dédoublement pyrogéné du pinène.

Action des autres métaux. — Le *nickel* réduit exerce à 600°, sur les vapeurs

de pinène, une décomposition très énergique avec dépôt abondant de matières charbonneuses et dégagement de gaz peu éclairants très riches en hydrogène; il se condense peu de liquides. Mais l'activité du métal ne tarde pas à diminuer au fur et à mesure de sa dissémination dans la masse charbonneuse, le gaz devient moins abondant et plus éclairant, se rapprochant de celui du cuivre, et l'on condense un liquide ambré (environ 75^{vol} pour 100^{vol} de pinène), où l'action successive de l'acide sulfurique et du mélange sulfonitrique décèle, à côté des carbures semblables à ceux fournis par le cuivre, une certaine dose de carbures saturés inattaqués, dûs à l'hydrogénation par le nickel des carbures éthyléniques ou terpéniques. Ainsi, dans les portions comprises entre 150° et 180°, le cymène se trouve accompagné d'une certaine proportion d'un *terpane*.

Le *cobalt* donne à 600° des résultats intermédiaires entre ceux du nickel et ceux du cuivre. Quand au *fer*, il se comporte à peu près comme le nickel, et donne lieu à un charbonnement très intense.

THERMODYNAMIQUE. — *Détermination directe de l'exposant de la température dans l'équation d'état des fluides.* Note de M. E. **Ariès**.

Nous avons appliqué à la détermination directe de l'exposant n, pour sept substances différentes, la formule démontrée dans notre dernière Note, et qui concerne les volumes moléculaires v_1 et v_2 d'un fluide saturé à l'état de vapeur ou à l'état liquide,

$$(1) \qquad v_1 - v_2 = \frac{RT_c}{8P_c}\frac{x}{\tau^{n+1}}(y_1 - y_2).$$

Ces substances, toutes examinées dans le Mémoire déjà signalé de M. Sydney Young, sont : le chlorure stannique, le formiate de méthyle, le formiate d'éthyle, le formiate de propyle, l'acétate de propyle, l'hexane et l'heptane. Le nombre des atomes qu'ils renferment augmente régulièrement de trois unités en passant de l'un d'eux au suivant, et varie de 5 atomes pour le chlorure stannique à 23 atomes pour l'heptane.

On tire de la formule ci-dessus

$$(2) \qquad n = \frac{\log\left[\frac{RT_c}{8P_c}\frac{x}{v_1 - v_2}(y_1 - y_2)\right]}{\log \tau} - 1.$$

La connaissance des éléments critiques T_c, P_c et de la tension de vaporisation ainsi que des volumes v_1 et v_2 à une température donnée, assignent, par cette dernière équation, une valeur bien déterminée à l'exposant n. Si la formule (1) est acceptable, l'application de l'équation (2), à différentes températures, à une substance *normale*, c'est-à-dire de constitution chimique bien définie et invariable, devra donner, à toutes ces températures, non pas rigoureusement la même valeur pour n, ce qui serait trop demander, mais des valeurs très rapprochées les unes des autres, et dont une sorte de moyenne sera la valeur à adopter.

En procédant par cette méthode, nous avons trouvé :

	n.
Pour le chlorure stannique	1,05
» le formiate de méthyle	1,10
» le formiate d'éthyle	1,15
» le formiate de propyle	1,18
» l'acétate de propyle	1,22
» l'hexane	1,26
» l'heptane	1,30

Si les sept valeurs de n, ci-dessus, ne peuvent être considérées comme absolument définitives, elles ne paraissent cependant susceptibles que de très légères modifications. Le Tableau suivant montre, en effet, avec quelle remarquable approximation ces valeurs permettent d'exprimer, par la formule (1), les variations de la différence $v_1 - v_2$ avec la température, sur toute l'étendue de l'échelle étudiée par M. S. Young, pour les sept substances. Plus de 60 pour 100 des valeurs de cette différence ainsi calculée s'approchent à moins de $\frac{1}{200}$ des valeurs observées; moins de 14 pour 100 d'entre elles accusent des écarts dépassant $\frac{1}{100}$. Les plus grands écarts se produisent toujours aux hautes températures, et atteignent, parfois, au voisinage immédiat de la température critique, une importance excessive, comme on le voit pour le formiate de propyle et pour l'heptane à 260° C, c'est-à-dire à moins de 5° et 7° des températures critiques de ces deux corps.

Ces divergences exagérées peuvent, sans doute, trouver leur explication dans une imperfection passagère de la formule (1) aux températures élevées, mais ce n'est peut-être pas la seule qu'on puisse invoquer. Il ne faut pas oublier que les observations deviennent de plus en plus difficiles à mesure que l'on s'approche de l'état critique, tant pour l'estimation des deux densités que pour celle de la tension de vaporisation. La formule (1)

Température centigrade.	$v_1 - v_2$ calculé.	$v_1 - v_2$ observé.

1. *Chlorure stannique.*

($T_c = 591,8$; $\mu = 261$; $n = 1,05$).

Température centigrade.	calculé.	observé.
100°	45,4921	45,2847
110	33,9642	34,1644
130	20,1714	20,3537
150	12,7262	12,7022
170	8,3332	8,3390
190	5,6674	5,6064
210	3,9015	3,8516
230	2,7133	2,6905
250	1,8642	1,8669
270	1,2514	1,2572
280	1,0130	1,0169

2. *Formiate de méthyle.*

($T_c = 487,1$; $\mu = 60,03$; $n = 1,1$).

Température centigrade.	calculé.	observé.
30	26,0185	26,1405
40	18,4495	18,4765
60	9,7647	9,8703
80	5,6556	5,6498
100	3,4517	3,4137
120	2,1795	2,1576
140	1,3821	1,3764
160	0,8828	0,8789
180	0,5455	0,5440
200	0,2792	0,2875

3. *Formiate d'éthyle.*

($T_c = 508,4$; $\mu = 74,05$; $n = 1,15$).

Température centigrade.	calculé.	observé.
50	30,1082	30,2988
60	21,6183	21,8854
80	12,0450	12,0560
100	7,0813	7,0841
120	4,3720	4,3739
140	2,7877	2,7885
160	1,8078	1,8056
180	1,1769	1,1764
200	0,7353	0,7369
220	0,3873	0,3966

4. *Formiate de propyle.*

($T_c = 537,95$; $\mu = 88,06$; $n = 1,18$),

Température centigrade.	calculé.	observé.
70	39,6529	39,4349
80	28,7973	28,8465
100	16,2274	16,1028
120	9,7119	9,6355
140	6,0677	6,0736

Formiate de propyle (suite).

Température centigrade.	calculé.	observé.
160	3,9300	3,9171
180	2,6074	2,5929
200	1,7332	1,7311
220	1,1301	1,1299
240	0,6703	0,6808
260	0,2339	0,2764

5. *Acétate de propyle.*

($T_c = 549,3$; $\mu = 102,08$; $n = 1,22$).

Température centigrade.	calculé.	observé.
90	41,3213	41,4202
100	30,4193	30,5467
120	17,4934	17,5885
140	10,5538	10,6034
160	6,6545	6,7119
180	4,3391	4,3524
200	2,8642	2,8518
220	1,8881	1,8637
240	1,1826	1,1647
260	0,6366	0,6388

6. *Hexane.*

($T_c = 507,9$; $\mu = 86,11$; $n = 1,26$).

Température centigrade.	calculé.	observé.
60	35,1248	34,4780
80	19,3101	19,1457
100	11,3538	11,2787
120	6,9831	7,0103
140	4,4444	4,4543
160	2,8829	2,8696
180	1,8709	1,8552
200	1,1629	1,1633
220	0,6062	0,6256

7. *Heptane.*

($T_c = 540,0$; $\mu = 100,13$; $n = 1,30$).

Température centigrade.	calculé.	observé.
70	68,9033	68,4328
80	49,8804	49,9067
100	27,5553	27,6729
120	16,3738	16,3124
140	10,1045	10,0580
160	6,4619	6,4464
180	4,2554	4,2744
200	2,8231	2,8287
220	1,8287	1,8297
240	1,0919	1,1050
260	0,4526	0,4881

devient précisément, aux hautes températures, très sensible aux erreurs qui peuvent être commises dans ces estimations. Ainsi pour l'heptane à 260°, en réduisant seulement de 13^{cm} la tension de vapeur observée qui est de 1847^{cm}, on élève de 0,4526 à 0,4852 la valeur calculée de $v_1 - v_2$ qui s'approche ainsi à près de $\frac{1}{200}$ de la valeur observée, considérée elle-même comme exacte, et qui est de 0,4881.

Il suffirait de remplacer deux des sept valeurs de n ci-dessus, 1,05 et 1,15 (chlorure stannique et formiate d'éthyle), respectivement par 1,06 et 1,14, pour faire correspondre, à chaque augmentation de trois atomes dans la constitution de la substance, une augmentation de 0,04 dans la valeur de n, ce qui conduit à penser que cet exposant, pour les corps diatomiques et triatomiques, doit être très voisin de l'unité tout en lui restant supérieur, et partir de l'unité pour les corps monoatomiques. Il ne serait donc pas toujours compris entre 0,5 et 1, comme nous l'avions supposé tout d'abord, alors que nous ne songions pas au parti qu'on peut tirer de la formule (1) pour déterminer n sans hésitation possible.

Les nouvelles valeurs que nous trouvons aujourd'hui diffèrent assez notablement des premières; elles doivent naturellement modifier et améliorer les expressions des fonctions Γ, propres à donner une bonne représentation des tensions de vaporisation. On constate, en effet, facilement que cette fonction reste très généralement supérieure à l'unité avant de prendre cette valeur obligée au point critique, sans avoir à l'atteindre une première fois à une certaine température réduite que nous avons si souvent trouvée voisine de 0,84. Il en est ainsi pour cinq des sept substances que nous venons d'examiner : pour deux d'entre elles seulement, le chlorure stannique et l'acétate de propyle, Γ devient égal à l'unité avant d'atteindre la température critique, mais à une température si voisine de celle-ci ($\tau = 0,9523$ pour l'acétate de propyle, ce qui correspond à 250° C.) qu'on est tenté d'admettre que, théoriquement, les deux températures doivent se confondre. Cette remarque ne manque pas d'importance, et devra servir de guide dans le choix de la forme à donner à la fonction Γ. Elle tend, en effet, à démontrer que, pour tous les corps, la courbe ayant comme abscisses les températures réduites τ et comme ordonnées les valeurs correspondantes de Γ, doit présenter au point critique ($\tau = 1$, $\Gamma = 1$), une tangente parallèle à l'axe des τ. La dérivée de la fonction doit être nulle pour $\tau = 1$.

M. Émile Bertin fait hommage à l'Académie d'une brochure intitulée : *Les cargos.*

ÉLECTIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à l'élection d'un Membre de la Division des Applications de la Science à l'Industrie.

Au premier tour de scrutin, le nombre de votants étant 53,

M. Hilaire de Chardonnet obtient	. . . .	31	suffrages
M. Georges Claude »	. . . .	6	»
M. Louis Lumière »	. . . .	6	»
M. Maxime Laubeuf »	. . . .	5	»
M. Charles Rabut »	. . . .	3	»
M. Émile Belot »	. . . .	1	suffrage
M. Lazare Weiller »	. . . .	1	»

M. **Hilaire de Chardonnet**, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu.

Son élection sera soumise à l'approbation de M. le Président de la République.

CORRESPONDANCE.

M. le Secrétaire général de la **Fondation Carnegie** invite l'Académie à élire l'un de ses membres qui occupera, dans la Commission administrative de la Fondation, la place vacante par le décès de M. *G. Darboux*.

M. **Henri Andoyer** prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à la place vacante, dans la Section d'Astronomie, par le décès de M. *Ch. Wolf*.

ASTRONOMIE. — *Sur les orbites spirales à gravitation équilibrée.* Note de M. **Emile Belot**, présentée par M. Bigourdan.

L'absence de tout calcul de Mécanique newtonienne dans la démonstration de la loi des distances des planètes et satellites a toujours étonné M. Poincaré et a jeté quelque discrédit sur la Cosmogonie tourbillonnaire. Les considérations et calculs suivants peuvent résoudre cette difficulté d'apparence paradoxale.

1° Rappelons d'abord que dans notre cosmogonie le système planétaire résulte du choc sur une nébuleuse amorphe N d'un noyau solaire primitif S (tourbillon ou nébuleuse planétaire) et des vibrations consécutives dans sa masse qui en détachent périodiquement à l'équateur les nappes planétaires. Supposons, pour fixer les idées, que le noyau S sur lequel se condensera ultérieurement la presque totalité de N ait d'abord une masse limitée à un centième de celle du Soleil. A la distance 1 du noyau N, la vitesse parabolique sera seulement $4^{km},2$. D'autre part, j'ai montré que le point de choc de S sur N était à 81 u. a. de l'écliptique primitive. A cette distance, la vitesse parabolique pour une masse nébuleuse N égale à celle du Soleil serait seulement $4^{km},6$, et l'attraction diminuant au fur et à mesure de la pénétration de S dans la nébuleuse N donnera lieu à des vitesses inférieures à $4^{km},6$. Mais la vitesse relative de la rencontre de S et N peut atteindre 300^{km}, valeur mesurée pour la nébuleuse d'Andromède, et le choc à cette vitesse peut produire dans le noyau S des projections de matière planétaire atteignant une vitesse de plusieurs milliers de kilomètres par seconde comme on en a mesuré dans les Novæ.

Ainsi les vitesses ($4^{km},2$ et $4^{km},6$) que peut produire l'attraction entre les masses en présence sont d'un ordre 100 à 1000 fois plus faible que les vitesses dues au choc; et l'attraction n'agira que comme une force perturbatrice négligeable dans les phénomènes mécaniques résultant de cette rencontre cosmique.

2° Mais supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et appelons *orbites à gravitation équilibrée* des trajectoires planes où en tout point l'attraction balance exactement la force centrifuge. Dans le système solaire, seule une orbite circulaire satisfait à cette condition qu'exprime la troisième loi de Képler. Mais dans un milieu nébuleux, une infinité de trajectoires spirales peuvent être des orbites à gravitation équilibrée, où les variations de distance au

centre ne dépendent que des forces autres que l'attraction. En effet, si une impulsion radiale déplace une masse située sur une telle orbite pour l'amener à une nouvelle distance où l'attraction balance encore la force centrifuge, il est évident que seules les forces répulsives radiales auront une action effective dans ce déplacement. Posons

$$(1) \qquad \omega = \omega_0(1 \pm t)^n \qquad (\omega = \omega_0 \text{ au temps } t = 0),$$

$$(2) \qquad \omega^2 r^3 = M \qquad (\text{troisième loi de Képler}).$$

De (1) on tire, pour la longitude Ω dans l'orbite, si $n \neq -1$,

$$(3) \qquad \Omega = \omega_0 \frac{(1 \pm t)^{n+1}}{n+1}.$$

L'élimination de ω et t entre (1), (2) et (3) donne une relation entre Ω et r qui est l'équation polaire de la famille de spirales obtenues quand on fait varier n. Les spirales sont centripètes quand n et le terme t sont de même signe et centrifuges dans le cas inverse.

Considérons le cas où $n = -1$ avec le signe $+$ devant le terme en t : l'équation (3) devra alors être remplacée par

$$(4) \qquad \Omega = \omega_0 \mathrm{L}(t + 1),$$

d'où, par (1) et (2),

$$(5) \qquad \omega_0^2 r^3 = e^{\frac{2\Omega}{\omega_0}} M.$$

Dans une nébuleuse que l'on peut supposer sphérique, la masse M donnant lieu à l'attraction centrale varie avec r et avec la loi des densités internes d. Dans une nébuleuse formée de gaz parfaits et sans noyau central condensé, on a

$$(6) \qquad d = \frac{A}{r^2},$$

d'où, par (5),

$$(7) \qquad \omega_0^2 r = \mu e^{\frac{\Omega}{\omega_0}} \qquad \left(\text{spirale logarithmique, } \mu = \frac{4}{3}\pi A\right).$$

Mais l'existence d'un noyau central S de rayon a fait varier subitement la densité à la distance a, ce qu'on peut exprimer en remplaçant (6) par

$$(6') \qquad d = \frac{A}{(r - a)^2}.$$

Par suite, (7) sera remplacé par

$$\omega_0^2(r-a)=\mu e^{\frac{\Omega}{\omega_0}}. \qquad (7')$$

Cette équation qui représente une conchoïde de spirale logarithmique est précisément celle que donne la cosmogonie tourbillonnaire pour les projections planes des trajectoires des masses planétaires primitives dans la nébuleuse N. Ainsi donc, d'après ce qui précède, de telles orbites sont à gravitation équilibrée et en chacun de leurs points l'attraction balance exactement la force centrifuge, laissant ainsi entièrement le champ libre dans la direction radiale à toutes les forces d'origine purement mécanique ou radiante qui peuvent prendre naissance dans un choc cosmique.

Il ne faudrait pas déduire de (6′) que la densité peut être infinie à la distance $r=a$; car, en réalité, les trajectoires planétaires ne prennent naissance qu'à l'extrémité du rayon $r=a+\varepsilon$ du renflement équatorial du noyau S produit par le choc.

Les nébuleuses spirales sont du type des spirales centrifuges et l'équation (7′) convient sans doute à leurs branches comme elle s'applique aux trajectoires divergentes des masses planétaires dans la nébuleuse primitive. Il est facile de voir que dans le cas d'une résistance R de milieu, non accompagnée de forces répulsives, la spirale sera centripète. En effet (H. Poincaré, *Hypothèses cosmogoniques*, p. 119), on a, dans ce cas avec (2), la condition

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{2R}{\omega};$$

d'où l'on déduit facilement, suivant les hypothèses faites sur R,

$$\omega=\omega_0\left(R\omega_0^{-\frac{1}{3}}M^{-\frac{1}{3}}t+1\right)^3 \qquad (\text{R const.}),$$

$$\omega=\omega_0\left(1-\omega_0^{\frac{1}{3}}M^{\frac{1}{3}}t\right)^{-3} \qquad (R\sim\omega^2r^2),$$

équations qui sont bien du type (1) avec le terme en t de même signe que n.

OPTIQUE. — *Sur la vitesse de la lumière dans les milieux troubles.* Note de MM. **Charles Chéneveau** et **René Audubert**, présentée par M. Lippmann.

La diffusion de la lumière par les milieux troubles fait intervenir le phénomène de diffraction si les particules sont de diamètre inférieur à la lon-

gueur d'onde de la lumière incidente; mais il est vraisemblable de supposer que, lorsque les particules ont des dimensions notables par rapport à la longueur d'onde et sont transparentes, ce sont probablement les phénomènes de réflexion ou de réfraction qui prennent de l'importance. On peut d'ailleurs constater que la lumière transmise par un milieu trouble, nettement polarisée à angle droit pour de petits granules, ne l'est sensiblement plus pour de grosses particules.

Imaginons un milieu trouble dans lequel des particules transparentes sont également réparties. Considérons dans une épaisseur e de ce milieu, une file de particules, de diamètre, d, séparées par des intervalles d' et placées sur le trajet d'un faisceau de lumière monochromatique. Si le milieu intergranulaire avait le même indice de réfraction que le milieu particulaire, pour la radiation considérée, le milieu serait transparent; c'est ce qui est à peu près réalisé pour des suspensions de résines provenant de la dissolution de certains caoutchoucs dans le benzène. Dans le milieu trouble, nous devons donc supposer que l'indice N' de la matière qui forme les particules est différent de l'indice N_0 du milieu interparticulaire.

Calculons le retard qui se produit, dans la propagation de la lumière, entre les chemins suivis par un rayon traversant le milieu intergranulaire et un rayon voisin rencontrant successivement les particules de la file suivant leur axe. Appelons N l'indice du milieu trouble, et admettons que la vitesse subisse, à chaque surface de séparation des milieux, une perte de $\mp a$ pour 100, suivant que l'indice N' est plus grand ou plus petit que l'indice N_0; s'il y a dans la file p particules et $p+1$ intervalles, on a

$$(N - N_0)e = N'd\left(\frac{1}{1\pm a} + \frac{1}{1\pm 3a} + \ldots + \frac{1}{1\pm(2p-1)a}\right)$$
$$- p\,dN_0 + N_0 d'\left(\frac{1}{1\mp 2a} + \frac{1}{1\mp 4a} + \ldots + \frac{1}{1\mp 2pa}\right) - pd'N_0,$$

d'où l'on peut déduire

$$(1)\qquad (N - N_0)e = pd(N' - N_0) \pm pa[p\,dN' - (p+1)\,d'N_0].$$

On peut tirer de ce résultat les conclusions suivantes :

1° Si d est petit vis-à-vis de d', l'équation (1) se résout en

$$(N - N_0)e = \mp p(p+1)a\,d'N_0.$$

Si l'on admet que la perte a est due uniquement à la réflexion et a la

valeur $a = \frac{N_0 - N'}{N_0 + N'}$, on peut évaluer la valeur de $(N - N_0)$ dans différents cas et la comparer à la valeur déterminée expérimentalement par la méthode de réflexion totale. Par exemple, pour la raie D, on a

			$N - N_0$ calculé.	$N - N_0$ observé.
Inclusion d'eau	$N' = 1,33$ dans une résine	$N_0 = 1,48$...	0,16	—0,16
Émulsion d'eau	$N' = 1,33$ dans l'huile	$N_0 = 1,47$...	0,08	+0,08
Émulsion d'huile	$N' = 1,47$ dans l'eau	$N_0 = 1,33$...	0,07	0,07

Ainsi l'indice du milieu trouble est toujours supérieur à celui du milieu intergranulaire.

Il paraît donc légitime de supposer que la réflexion joue un rôle important dans tous les phénomènes optiques présentés par les milieux à grosses particules.

2° Si $N' = N_0$, $a = 0$ et le deuxième terme de la relation (1) s'annule comme le premier. On voit donc bien que, dans ce cas, les particules transparentes en suspension dans un milieu de même indice de réfraction ne produiront aucun trouble optique, fait confirmé par l'expérience.

THERMODYNAMIQUE. — *Sur l'application de l'équation de Gibbs-Helmholtz,* $A - U = T\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)$, *aux systèmes monovariants.* Note de M. A. **Boutaric**, présentée par M. Daniel Berthelot.

1. L'équation de Gibbs-Helmholtz,

$$A - U = T\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_v, \tag{1}$$

dans laquelle A représente le maximum de travail que puisse fournir un phénomène isothermique accompli à la température T, et U la diminution correspondante de l'énergie totale du système, a été établie pour les systèmes thermo-élastiques dont l'état dépend d'au moins deux variables indépendantes v et T (systèmes divariants).

Pour de tels systèmes, elle permet de calculer sans ambiguïté la variation U de l'énergie totale en fonction de v et de T quand on connaît la variation A de l'énergie libre en fonction des mêmes variables. Connaissant U, elle permet de calculer A à une constante près.

2. Quand on envisage des transformations portant sur des systèmes monovariants, les volumes qui interviennent étant déterminés par la température, A et U deviennent uniquement fonction de T. Il pourrait sembler, à première vue, que l'équation (1) doit être remplacée par

$$A - U = T\frac{dA}{dT}, \quad (1\ bis)$$

$\frac{dA}{dT}$ désignant la dérivée, par rapport à T, de A, fonction de l'unique variable T. C'est ce que supposent implicitement Nernst et tous ses commentateurs [1] dans l'application qu'ils font de l'équation (1) au calcul de A à partir des seules données thermiques fournies par la fonction $U = f(T)$.

En réalité, il est aisé de montrer qu'une telle extension n'est pas légitime, tout au moins d'une manière générale, et qu'elle pourrait conduire à des erreurs grossières.

Considérons par exemple la vaporisation d'un solide ou d'un liquide. Désignons par p la pression maxima à T°, par v_2 et v_1 les volumes moléculaires respectifs de la phase gazeuse et de la phase solide ou liquide; la diminution d'énergie libre, rapportée à la molécule gramme, est

$$A = p(v_2 - v_1)$$

qui devient, en négligeant le volume v_1 de la phase solide ou liquide vis-à-vis du volume v_2 de la phase gazeuse,

$$A = p v_2;$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_v = v_2\frac{dp}{dT}.$$

En portant dans l'équation (1) on obtient l'expression correcte de la chaleur de vaporisation :

$$Q = A - U = T v_2 \frac{dp}{dT}.$$

Supposons au contraire que nous exprimions A en fonction de T. Assimilant la vapeur à un gaz parfait, nous avons

$$A = RT,$$

(1) Voir, en particulier, Nernst, *Journal de Chimie physique*, t. 8, 1910, p. 228.

d'où

$$\frac{dA}{dT} R.$$

Cette valeur de $\frac{dA}{dT}$, portée dans l'équation (1 *bis*), conduirait à une expression *inexacte* de la chaleur de vaporisation, soit

$$Q = A - U = T\frac{dA}{dT} = RT.$$

3. On peut modifier l'équation (1) de manière à la rendre applicable aux transformations isothermiques des systèmes monovariants.

En désignant par dv la variation de volume de l'une des phases sous la pression p, on a

$$A = \int p\,dv,$$

p et v étant des fonctions de la température seule. (L'intégrale s'applique à l'ensemble des phases et à l'ensemble des transformations envisagées.) D'où

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_v = \int \frac{dp}{dT}\,dv = \frac{dA}{dT} - \int p\,\frac{d^2v}{d^2T}\,dT.$$

Pour les transformations des systèmes monovariants, l'équation qui relie les variations A et U de l'énergie libre et de l'énergie totale *considérées comme des fonctions de la température seule* est alors

$$\text{(1 } ter\text{)} \qquad A - U = T\left(\frac{dA}{dT} - \int p\,\frac{d^2v}{dT^2}\,dT\right).$$

C'est l'équation qu'on devra appliquer, par exemple, à la fusion d'un solide en présence du liquide seul sous la pression d'équilibre correspondante.

On voit, par les considérations qui précèdent, qu'on ne peut espérer calculer A connaissant uniquement la fonction $U = f(T)$: les hypothèses de Nernst sur les valeurs de $\frac{dA}{dT}$ au zéro absolu ne résolvent pas, *dans le cas le plus général*, le problème pour lequel elles ont été émises, à savoir le calcul de A à partir des seules données thermiques fournies par la fonction $U = f(T)$.

4. L'équation (1) peut cependant être mise sous la forme (1 *bis*) pour les transformations des systèmes monovariants telles que $\frac{dA}{dT}$ soit identique à $\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_v$ ce qui suppose

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0.$$

Cette condition est réalisée dans un certain nombre de cas, notamment dans ceux que choisit Nernst comme exemples d'application de son hypothèse.

CHIMIE PHYSIQUE. — *L'eutexie et les solutions étendues.* Note de M. **Alb. Colson**, présentée par M. Lippmann.

Eutexie. — L'expérience montre que le refroidissement d'une dissolution s'arrête brusquement à une température T_e à laquelle la totalité de la dissolution se solidifie, comme il arriverait à un liquide pur. C'est le phénomène d'eutexie qui, chaque jour, présente des applications nouvelles.

Or, ce résultat expérimental est contenu dans la formule de solubilité déjà exposée [1],

$$425 \times L = T(V + \varepsilon)\, i \frac{dC}{dT}.$$

En effet, le volume V du solvant qui renferme 1^{mol} en dissolution saturée (volume qui est inversement proportionnel à la solubilité en volume) augmente pour $L > 0$, sous l'influence du refroidissement; il passe par un minimum quand L change de signe. Je vais montrer qu'il atteint, généralement, un maximum où il reste invariable pendant le travail de refroidissement. C'est ce maximum qui correspond au phénomène eutectique.

Refroidissons, par exemple, une solution saturée de sel marin; celui-ci se dépose et V augmente. Vers $T = 273°$ (glace fondante) apparaît un point anguleux en même temps que l'hydrate $NaCl, 2H^2O$, mais, comme nous l'avons vu, V continue à croître. L'effet du refroidissement progressif conduirait alors à des solutions de plus en plus diluées, congelables à des températures qui se relèveraient et tendraient vers 273°. Deux alternatives se présentent donc :

---

[1] *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 681.

a. Ou bien T passe par un minimum, ce qui exige $\frac{dT}{dC} = 0$ et $L = \infty$ pour satisfaire à l'équation

$$425 \times L = T(V + \varepsilon)\, i \frac{dC}{dT},$$

ce qui est impossible, puisque le travail de saturation $425 \times L$ n'est pas infini.

b. Ou bien T reste invariable, donc dT et dC sont nuls simultanément, puisque L n'est pas nul, c'est-à-dire que la température T et la concentration C ne changent plus sous l'action du refroidissement. Mais si C est fixe, V l'est aussi, ce qui exige que la solution conserve une composition invariable, identique à celle du dépôt, ce qui est bien la définition de l'eutectique.

Solutions étendues. — L'eutexie peut être figurée par un point anguleux provenant de l'intersection de la courbe de saturation avec la courbe de congélation des solutions étendues. Ce point de rencontre, situé au point le plus bas, constitue en quelque sorte le pendant du summum de solubilité.

Si, en effet, nous ajoutons dans un mélange eutectique un excès de sel constituant, à la température eutectique T_e, il ne se dissoudra pas. Si nous élevons la température le sel se dissoudra et inversement se redéposera par refroidissement. C'est la succession de ces états qui est régie par la loi générale dont nous avons déduit l'eutexie, c'est-à-dire

$$(1) \qquad 425L = T(V + \varepsilon)\, i \frac{dC}{dT}.$$

Si, au lieu du sel, nous ajoutons une quantité quelconque du solvant solidifié à une température égale ou inférieure à T_e, il reste intact; mais il disparaîtra par dissolution à une température supérieure à T_e, pour se reconstituer d'une manière réversible par refroidissement. La solubilité du solvant solide est donc assimilable à celle du corps saturant.

Si nous désignons par C' la concentration du *solvant* dans la dissolution, par L' la chaleur de dissolution d'une molécule du solvant solidifié dans le volume correspondant à C' à une température T supérieure à T_e, on aura donc

$$(2) \qquad 425L' = T(V' + \varepsilon')\, i' \frac{dC'}{dT}.$$

D'ailleurs $C' = 100 - C$ d'après la définition de la concentration, donc

$$\frac{dC'}{dT} = -\frac{dC}{dT}.$$

La substitution de la valeur de la concentration saline C à C′ dans l'équation (2) donne une relation entre la concentration saline et la température T de fusion du solvant dans une solution où la concentration saline est C.

La valeur L′, qui se rapproche d'ailleurs extrêmement de la chaleur de fusion d'une molécule du solvant pour les solutions étendues, reste positive; $\frac{dC}{dT}$ doit donc être négatif, c'est-à-dire que la température T augmente lorsque la concentration C diminue, ce qui est conforme aux faits.

La courbe représentative de l'équation (1) est la courbe de saturation du sel dans le solvant ou plus généralement d'un corps A dans un corps B. La courbe représentative de l'équation (2) est relative à la saturation du corps B dissous dans le corps A. Le point de rencontre de ces deux courbes figure donc l'état de saturation mutuelle des deux corps l'un par l'autre, de sorte que l'eutexie résulte en somme de cette saturation mutuelle et l'on comprend alors que le refroidissement provoque la solidification simultanée des deux corps A et B.

Les équations (1) et (2) s'appliquent non seulement aux solubilités dans l'eau, mais à celles des corps organiques les uns dans les autres et même à celles d'un métal A dans un métal fondu B, ce dernier pouvant être un corps pur ou une combinaison définie de deux métaux.

En un mot, ces considérations s'appliquent aux alliages aussi bien qu'aux autres dissolutions, pourvu que le phénomène soit réversible et qu'il ne soit pas troublé, par exemple, par un cas d'isomorphisme ou de cristaux mixtes.

Remarquons, de plus, que l'équation (2), tirée par un artifice de calcul, de la loi rationnelle des solutions saturées, est elle-même rationnelle. Autrement dit, elle doit exprimer toutes les propriétés des dissolutions étendues; en particulier, elle doit contenir en germe les propriétés cryoscopiques constatées expérimentalement par Raoul. C'est là un point chimique de première importance qu'il nous est impossible de développer ici.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur l'isolement et la caractérisation des alcools à l'état d'allophanates.* Note ([1]) de M. A. **Béhal**, présentée par M. A. Haller.

L'extraction des alcools des mélanges qui les renferment est un problème qui se pose fréquemment en Chimie organique, soit dans l'analyse des huiles essentielles, soit dans les recherches purement synthétiques.

Quand on a poussé les méthodes physiques aussi loin que possible et que l'alcool n'est pas pur, on est obligé de recourir à des méthodes chimiques. Celles-ci consistent à transformer les alcools en dérivés qui, en raison de leurs propriétés physiques ou chimiques spéciales, se prêtent aisément à une séparation.

La transformation des alcools en éthers-sels a fréquemment servi de base à des méthodes de ce genre. Le premier procédé susceptible d'une application générale aux alcools primaires a été donné par Pasteur, qui eut recours à la séparation de deux alcools contenus dans l'alcool amylique de fermentation en les transformant en éthers sulfuriques acides qu'il convertit en sels de baryum dont la solubilité dans l'eau était différente et qui permettaient le retour par hydrolyse aux alcools primitifs.

L'emploi de certains acides bibasiques organiques a fourni des résultats d'une portée plus générale encore, puisqu'elle s'étend aux alcools secondaires. La méthode est due à M. A. Haller. Dans une étude sur les bornéols et en particulier sur le camphol de romarin, publiée en 1889 ([2]), M. A. Haller utilisa les propriétés que possèdent les acides bibasiques organiques de donner, avec des alcools, des éthers-sels acides solubles dans les alcalis, et d'où les alcools peuvent être aisément régénérés par saponification.

Tiemann et Krieger ([3]) ont fait remarquer que cette méthode ne saurait convenir à la plupart des alcools de la série terpénique, en raison de la facilité avec laquelle ces alcools subissent des transformations, sous l'influence des acides ou de chaleur.

Quoi qu'il en soit, la méthode de M. A. Haller a rendu de grands services; elle a été appliquée par Dodge dans ses études de l'essence de citronnelle et, après lui, par de nombreux chimistes qui se sont occupés de la composition des huiles essentielles. M. A. Haller a, lui-même, préconisé la préparation du phtalate acide de méthyle au moyen de l'anhydride phtalique pour obtenir facilement l'alcool méthylique pur.

Bouveault a proposé, pour caractériser et séparer un alcool d'un mélange, l'emploi de l'acide pyruvique dont il transformait les éthers en semi-carbazones, d'où l'on pouvait revenir aux alcools par saponification.

([1]) Séance du 5 mai 1919.

([2]) *Comptes rendus*, t. **108**, 1889, p. 140, et t. **110**, 1890, p. 580.

([3]) Tiemann et Krieger, *Ber. d. ch. Ges.*, t. **29**, 1896, p. 901.

On a utilisé ensuite, pour caractériser les alcools, l'isocyanate de phényle ou le chlorure de diphénylcarbamide, qui conduit à l'obtention d'uréthanes.

J'ai repris une méthode déjà connue qui consiste à faire réagir l'acide cyanique sur les alcools et qui fournit surtout des allophanates à côté des uréthanes qui, la plupart du temps, ne sont que des produits accessoires à la réaction.

On connaissait quelques dérivés allophaniques des alcools primaires et secondaires à fonction simple, et des polyalcools simples ou à fonction complexe.

Un de mes élèves, M. L. Belières, a étudié un certain nombre de termes de la série acyclique, alcools primaires et secondaires.

Cette méthode a été appliquée aux alcools primaires, secondaires et tertiaires. Je dois faire remarquer qu'aucune des méthodes précédentes n'était utilisable dans le cas des alcools tertiaires.

Je l'ai employée d'autre part dans la série des alcools dits terpéniques et et elle m'a permis d'apporter quelques lumières sur la composition de divers produits de ce groupe.

Je l'ai étendue aux alcools cycliques, aux alcools de la série benzénique et enfin aux phénols, dont je n'ai trouvé mentionné que le premier terme.

La méthode de préparation a consisté à faire passer un courant de gaz cyanique dans l'alcool; le gaz est fourni par la dépolymérisation de l'acide cyanurique.

Le produit de la réaction est lavé à l'éther, pour enlever l'alcool qui aurait pu ne pas réagir et l'uréthane qui se forme toujours en quantité plus ou moins grande.

Le résidu insoluble qui constitue l'allophanate souillé par un peu d'acide cyanurique est redissous à chaud dans l'alcool absolu, le benzène ou l'acétone, et il cristallise par refroidissement.

Tous les allophanates que nous avons obtenus sont des corps cristallisés et inodores, leur solubilité dans l'éther froid est très faible, leur solubilité dans l'alcool froid est un peu plus grande mais néanmoins encore faible.

Dans les alcools de la série acyclique, nous avons observé que les allophanates tertiaires étaient saponifiés par l'action de l'eau bouillante. Il en est de même pour les phénols.

L'alcool est régénéré; il se dégage de l'acide carbonique et l'on obtient de l'urée.

En opérant sur 5^g d'alcool ou de substance renfermant ces 5^g, on peut d'abord isoler l'alcool, le caractériser par le point de fusion de son allo-

phanate et le régénérer pour prendre ses constantes physiques et refaire à nouveau l'allophanate qui doit être identique au corps primitif.

Dans la série des alcools terpéniques, le linalol se comporte comme un alcool qu'on doit mettre hors cadre. Tous les autres alcools du groupe se comportent normalement.

J'ai étudié les différents termes du groupe qui nécessitent à eux seuls un Mémoire développé.

La série des alcools cycliques ne donne lieu à aucune observation. La formation des allophanates, sauf dans le cas du terpinol, est normale, et ceux-ci présentent les caractères habituels.

Dans la série cyclique, on peut observer des perturbations graves lorsque les corps renferment des fonctions phénoliques.

Si la fonction phénolique est éthérifiée par des alcoyles ou des aryles, elle n'amène plus aucune perturbation et la réaction est normale.

Comme au point de vue de la séparation, les corps à fonction phénolique sont solubles dans les alcalis, il sera aisé d'utiliser le traitement alcalin pour séparer au préalable les corps à fonction phénolique.

Les alcools à fonction carbure éthylénique, aussi bien dans la série cyclique que dans la série acyclique, donnent des allophanates normaux.

MÉTÉOROLOGIE. — *Influence des saisons et des régimes aérologiques sur les variations corrélatives de la pression atmosphérique et de l'intensité du vent.* Note de MM. G. **Reboul** et L. **Dunoyer**.

Dans notre Note du 14 avril [1] (dont le lecteur est prié de rétablir le texte d'après l'erratum publié aux *Comptes rendus* du 22 avril), nous avons montré l'importance que présente, pour la prévision des variations barométriques, la variation dans le temps ou en altitude de l'intensité du vent. Fidèles à notre principe : ne pas nous borner à indiquer quelques exemples sur lesquels nos thèses seraient remarquablement vérifiées, mais tenir compte, au contraire, de *tous* les cas, défavorables aussi bien que favorables, nous croyons devoir compléter cette Note en indiquant comment varie, suivant la saison et le régime des vents, le coefficient de certitude de nos règles.

---

[1] *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 785.

I. Considérons d'abord le cas où des *sondages successifs* donnent des vents croissants ou décroissants d'un sondage à l'autre. Pour l'année qui s'étend de septembre 1915 à septembre 1916, nous obtenons les résultats suivants :

Coefficient de certitude.	Vents croissants d'un sondage à l'autre, accompagnés de baisse.	Vents décroissants d'un sondage à l'autre, accompagnés de hausse.	Vents stationnaires d'un sondage à l'autre, Immobilité barométrique.
Été.......	0,79	0,53	0,76
Hiver.....	0,90	0,90	0,94

Les règles énoncées s'appliquent donc mieux l'hiver (où leur coefficient de certitude est remarquablement grand) que l'été. Cela tient sans doute à l'existence des périodes orageuses de cette dernière saison ; de brusques variations dans l'intensité du vent, dues à des phénomènes locaux, se produisent alors sans variations barométriques importantes, régulières, et géographiquement étendues.

Au lieu de chercher quelle est l'influence de la saison sur la régularité avec laquelle la variation d'intensité du vent amène une variation de la pression, on peut chercher quelle est, dans ce phénomène, l'importance de la direction du vent. Voici le résultat :

Coefficient de certitude annuel moyen pour les vents de :	
N — NE — E..............................	0,68
SE — S — SW — W — NW.................	0,84

Les règles s'appliquent donc mieux pour les vents des régions SW que pour ceux des régions NE. Il faut noter que les vents de SW sont des vents humides (et chauds l'hiver), tandis que les vents NE sont des vents secs. Or il est incontestable que la chaleur et l'humidité jouent un rôle important dans la formation et la propagation des grandes perturbations.

II. Considérons maintenant le cas où *un sondage fait apparaître une forte différence d'intensité entre le vent des grandes altitudes et celui des couches inférieures*. La discussion des observations faites pendant la même période que ci-dessus nous conduit aux résultats suivants :

Coefficient de certitude.	Vents forts en haut accompagnés ou suivis de baisse.	Vents faibles en haut accompagnés ou suivis de hausse.	Vents homogènes, immobilité barométrique.
Été...................	0,75	0,53	0,60
Hiver.................	0,82	0,76	0,85

Ainsi donc, comme précédemment, les règles s'appliquent mieux l'hiver que l'été, et sans doute pour des raisons analogues. Pendant l'été, les couches inférieures, soumises au violent échauffement du sol, sont de moins bonnes indicatrices des phénomènes généraux, et par conséquent aussi, leur comparaison avec les couches supérieures donne des indications plus aléatoires.

L'examen du coefficient de certitude en fonction de la direction des vents conduit également au même résultat que plus haut.

Coefficient de certitude annuel moyen pour des vents de :	
N — NE — E	0,65
SE — S — SW — W — NW	0,80

La valeur des règles, faisant intervenir les vents de sondage pour la prévision de la hausse ou de la baisse suivant qu'ils sont forts ou faibles en haut, est donc plus grande pour les vents de SW que pour les vents de NE.

A propos d'une Note de M. Guilbert. — Dans le précédent *Compte rendu*, M. G. Guilbert critique notre Note du 3 mars sur les vents d'appel (Note que d'ailleurs il ne cite pas) et une autre Note (qu'il cite) du 17 février sur les coefficients de certitude ([1]).

Dans notre Note sur les vents d'appel, nous croyions avoir montré avec une suffisante clarté dans quelle mesure la règle sur les vents d'appel, telle que nous l'énonçons, dérivait des tentatives que nous avons faites pour appliquer journellement les règles de M. Guilbert. Nous croyions aussi avoir clairement défini notre point de vue : nous ne prétendons pas inventer les vents d'appel; nous disons simplement que, dans l'ensemble des 25 règles énoncées par M. Guilbert au Chapitre III de son Ouvrage bien connu, l'action des vents d'appel, c'est-à-dire d'une certaine catégorie de vents divergents (comme Brunhes le faisait d'ailleurs remarquer dans sa Préface), nous paraît seule à retenir. Nous avons en outre précisé dans notre Note les conditions d'application de la règle des vents d'appel suivant l'époque de l'année et la direction d'appel, ce qui présente, en pratique, un important progrès.

Quant à nos coefficients de certitude, il nous aurait été facile assurément, comme nous l'indique M. Guilbert, de leur trouver une valeur plus grande, en donnant une prépondérance marquée aux cas types. Nul plus que nous

([1]) *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 457 et 356.

n'est favorable à l'étude privilégiée des cas types. En météorologie, où l'expérimentation proprement dite est impossible, ils constituent un des plus puissants modes d'investigation. Mais ils sont rares dans la pratique quotidienne de la prévision. Leur donner une importance prédominante dans l'estimation du coefficient de certitude exposerait donc à de fâcheuses illusions sur la grandeur réelle, pratique, de ce coefficient. C'est ainsi qu'une méthode comme celle de M. Guilbert, assise sur quelques vérifications remarquables dans des cas types, n'arrive à donner que des renseignements notoirement vagues et insuffisants dans les cas ternes, indécis, à évolution lente, qui sont la monnaie courante des cartes isobariques.

C'est donc la valeur minima du coefficient de certitude qu'il est utile de connaître, quitte à la majorer d'après l'étude de chaque cas particulier et en faisant intervenir, non pas un seul élément météorologique, les vents de surface, comme le fait M. Guilbert, mais tous les éléments que l'observation permet d'atteindre (vents de sondage, tendance, etc.).

PALÉOBOTANIQUE. — *Sur la découverte du* Laurus canariensis *Webb et Berth., dans les tufs de Montpellier.* Note de M. **Josias Braun-Blanquet**, présentée par M. Guignard.

Les tufs quaternaires de la vallée du Lez, près de Montpellier, ont déjà été l'objet de travaux importants. On y a signalé une trentaine de végétaux et de nombreux mollusques (63 espèces), vivant encore pour la plupart au voisinage immédiat de ces dépôts. La détermination exacte de l'âge de ces tufs est d'autant plus importante qu'ils constituent un des gisements quaternaires les plus riches de France.

D'après G. Planchon [1], la formation des tufs de Montpellier serait plus récente qne celle des travertins de Provence étudiés par Saporta [2]. « Elle me paraît devoir être rapportée à l'époque où des conditions climatiques analogues aux nôtres se sont définitivement établies pour ne subir que des oscillations insignifiantes [3] ». M. Viguier [4], en s'appuyant sur

(1) *Étude des tufs de Montpellier*, Paris, 1864.

(2) *Sur la flore des tufs quaternaires en Provence* (*Congr. scient. Fr.*, 33e sess., t. I, p. 267-296).

(3) Planchon, *loc. cit.*, p. 61.

(4) *Etude sur quelques formations de tufs de l'époque actuelle* (*Revue des Sciences naturelles*, Montpellier, 1881).

la faune malacologique, accentue encore cette opinion; il ne croit pas à la contemporanéité des tufs des Aygalades près de Marseille avec ceux de Montpellier et il rapporte ces derniers à l'époque des alluvions modernes. Une étude d'ensemble sur la flore des tufs quaternaires de la France m'avait déjà conduit à un résultat différent.

Les tufs de Montpellier contiennent, en effet, trois végétaux franchement méditerranéens, qui ne croissent plus à l'état spontané aux environs de cette ville. Ils se rencontrent cependant ailleurs, sur le pourtour septentrional de la Méditerranée (*Cotoneaster Pyracantha*, *Laurus nobilis*, *Vitis vinifera*). Plusieurs autres espèces des mêmes tufs se sont retirées dans la montagne et manquent aujourd'hui complètement à la plaine languedocienne.

Ainsi *Pinus nigra* var. *Salzmanni* et *Acer Opulus* sont cantonnés sur l'étage du chêne blanc et du hêtre dans les Cévennes. *Ilex aquifolium*, planté à Montpellier, se rencontre très rarement à l'état naturel au delà de la bordure cévenole. *Fraxinus Ornus*, espèce subméditerranéenne-montagnarde, suit le cordon montagneux de l'Illyrie à la Ligurie et aux Alpes-Maritimes, pour y atteindre actuellement sa limite extrême vers l'Ouest. *Acer neapolitanum* enfin est localisé dans les bois montagneux de l'Italie méridionale.

Aucune des espèces émigrées ne demande un climat plus chaud que le climat actuel de Montpellier. Mais la plupart d'entre elles exigent un régime moins extrême et surtout plus humide, en d'autres termes plus océanique. Elles trouvent leur optimum de développement dans les basses montagnes, sur la lisière méditerranéenne où la saison sèche de l'été est de courte durée, où les brouillards sont fréquents et où les précipitations annuelles atteignent de 1200^{mm} à 1800^{mm} par an.

Le caractère océanique de cette flore la rapproche des flores interglaciaires de Resson, de Pont-à-Mousson, etc., tandis que la liste des espèces indique surtout des rapports avec la flore du même âge des travertins de Meyrargues et des Aygalades en Provence. Or, le gisement des Aygalades est nettement caractérisé comme appartenant au Chelléen par la présence de *l'Elephas antiquus* et du *Laurus canariensis*. La découverte toute récente du *Laurus canariensis* dans les tufs de Montpellier me paraît de nature à confirmer leur synchronisme.

J'ai trouvé dans la partie inférieure de ces tufs (au Gasconnet) plusieurs grands fragments de feuille et une feuille tout entière, très bien conservée. Les fragments avaient la même taille et la même forme que la feuille

entière, les bords visibles étaient parfaitement plans, la nervation identique.

La détermination a été faite à l'aide des échantillons authentiques des herbiers de l'Institut botanique de Montpellier et des reproductions de feuilles fossiles et vivantes données par Webb et Berthelot, par de Saporta et par M. L. Laurent.

Description de la feuille entière (face supérieure) : Forme nettement obovale; longueur (sans le pétiole) 7^{cm}, largeur $4^{cm},4$; largeur maximum vers le sommet à $2^{cm},6$ de la pointe, se rétrécissant insensiblement vers la base. Pétiole $1^{cm},6$ de long, canaliculé, large de 3^{mm}. Bords entièrement plans, sans trace d'ondulation. Sommet de la feuille arrondi, très faiblement acuminé (chez le *Laurus nobilis*, les feuilles déformées seules sont arrondies). Nervure médiane très développée, mais pas saillante. Nervures secondaires, huit à neuf de chaque côté, presque parallèles, droites, allant jusqu'au bord. Dichotomie des nervures secondaires du milieu du limbe très faible (chez le *L. nobilis* très prononcée). Nervures tertiaires à réseau de mailles très fines et très visibles.

Le pétiole intact d'une seconde feuille mesure $1^{cm},4$. D'après Planchon, la longueur moyenne du pétiole du *L. nobilis* est de 3^{mm} à 6^{mm}; il atteint et dépasse rarement 1^{cm}.

Le *Laurus canariensis* est relégué aujourd'hui aux îles Canaries et à Madère, où il habite la ceinture des brouillards persistants. En Europe, l'arbre a existé depuis le Tertiaire moyen jusqu'au Quaternaire moyen; il a été reconnu dans de nombreux gisements du Pliocène et du Pléistocène moyen de la France, notamment dans les tufs de la Provence; il peut donc être considéré comme caractéristique des dépôts de cet âge.

Conclusion. — La présence du *Laurus canariensis* dans les tufs de Montpellier confirme et *accentue le caractère océanique* et relativement chaud de la flore au temps de la formation de ce dépôt; elle permet en outre de *le synchroniser avec les tufs des Aygalades* qui datent de la dernière période interglaciaire.

PALÉOBOTANIQUE. — *Relations des zones végétales* A_1A_2 *et* B_1B_2 *avec les niveaux marins du terrain houiller du nord de la France.* Note [1] de M. **Paul Bertrand**, présentée par M. Ch. Barrois.

Les horizons marins, par leur inégale répartition dans le terrain houiller, comme aussi par leurs caractères paléontologiques propres, constituent des

(1) Séance du 5 mai 1919.

niveaux-repères très précieux pour les exploitants et pour les géologues [1]. Ces horizons ont permis d'établir la succession et la répartition des principales zones végétales du wesphalien du nord de la France sur des bases nouvelles et très sûres [2]. Il convient de souligner par quelques remarques l'importance de ces horizons au point de vue stratigraphique et paléobotanique :

1. La zone inférieure A_1 ou zone à *Pecopteris aspera* Br. (Assise de Flines), pauvre en houille, renferme plusieurs bancs marins caractéristiques (6 environ). Elle est limitée à sa partie supérieure par le *grès de Flines* (*grès d'Andenne*) qui renferme lui-même un niveau marin.

2. *Importance stratigraphique du niveau marin de la passée du toit de Laure.* — La zone A_2 de Zeiller débute au grès de Flines; elle se termine à 150 ou 200^m sous le niveau marin de *Poissonnière*. Elle correspond à peu près à l'assise de Vicoigne de MM. Barrois et Pruvost. Elle comprend en réalité deux zones distinctes : la partie inférieure seule constitue véritablement la zone à *Nevropteris Schlehani* Stur et *Sphenopteris Hœninghausi* Br.; la partie supérieure constitue la zone à *Alethopteris lonchitica* Schloth.; elle est caractérisée par la diminution marquée de *N. Schlehani* et *S. Hœninghausi* et par la multiplication des *Nevropteris* autres que *N. Schlehani*.

Or la moitié inférieure de l'assise de Vicoigne renferme d'abord deux ou trois niveaux à Lingules (faisceau d'*Olympe* de la fosse Notre-Dame d'Aniche); puis vient le niveau marin de la passée du toit de *Laure*, qui représente par conséquent le plus élevé des horizons marins de la zone à *N. Schlehani* et *S. Hœninghausi*. C'est à une faible distance au-dessus de ce niveau (100^m au maximum) que débute la zone à *Alethopteris lonchitica*.

3. *Importance statigraphique du niveau marin de Poissonnière.* — La zone à *Lonchopteris Bricei* Br. (zone $B_1 B_2$ de Zeiller), qui mesure plus de 600^m d'épaisseur à la fosse Notre-Dame, débute à 150^m ou 200^m sous *Poissonnière;* elle s'étend à environ 500^m au-dessus de ce niveau.

M. Barrois a signalé à plusieurs reprises l'importance stratigraphique du

(1) Ch. Barrois et P. Pruvost, *Les divisions stratigraphiques du terrain houiller du nord de la France* (*Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 647).

(2) Voir P. Bertrand, *Les zones végétales du terrain houiller du nord de la France* (*Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 780).

niveau de *Poissonnière* (¹). Alors que les niveaux marins de l'assise de Flines ou ceux de la zone à *N. Schlehani* et *S. Hœninghausi* sont *groupés*, c'est-à-dire séparés seulement par de faibles épaisseurs de terrains, le niveau de *Poissonnière-Bernard* est isolé au milieu du terrain houiller productif : il est distant de 400^m environ du niveau marin de la passée de *Laure*. Or ces observations s'appliquent également aux niveaux marins du bassin de la Ruhr; là aussi, on trouve un niveau marin : celui de *Catharina*, nettement isolé au milieu des charbons gras.

Il semble donc naturel d'identifier le niveau de *Poissonnière* et celui de *Catharina*.

La répartition des zones végétales par rapport aux niveaux marins confirme cette identification. Dès 1893, Cremer, après une étude sommaire de la flore du bassin de la Ruhr (²) constatait :

1° Que *N. Schlehani* et *S. Hœninghausi* avaient leur maximum de fréquence dans la zone des charbons maigres (zone riche en bancs marins correspondant au faisceau d'*Olympe* d'Aniche) ;

2° Que le *Lonchopteris Bricei* était déjà fréquent dans la bande de terrains immédiatement inférieure à *Catharina*.

Les mêmes faits ont été observés par M. Carpentier (³) sur la concession d'Anzin et par moi-même sur la concession d'Aniche (⁴).

(¹) Ch. Barrois, *Note sur la veine Poissonnière du terrain houiller d'Aniche* (*Ann. S. N. G.*, t. 39, p. 49).

(²) L. Cremer, *Ueber die foss. Farne des westfäl. Carbons u. ihre Bedeut. für eine Gliederung des letzteren*, Marburg, 1893.

(³) A. Carpentier, *Carbonifère du Nord de la France*. (*Mém. S. G. N.*, t. VII, n° 2, p. 176-231). — Les résultats obtenus par M. A. Carpentier sont d'autant plus remarquables qu'il ne connaissait pas à Anzin la position des horizons marins de la passée de *Laure* et de *Poissonnière*.

(⁴) A titre de renseignements, il convient de signaler les équivalences suivantes, qui ont été établies par le service du Musée houiller de Lille, sous la direction de M. Barrois :

Concession d'Aniche :

Bande nord (fosse Déjardin)		Bande centrale (fosse Notre-Dame)		Renversés de la bordure sud (fosse d'Erchin)
Poissonnière	=	*Bernard*		
Niveau marin sous 6ᵉ veine	=	Niveau de la passée du toit de *Laure*	=	Niveau marin de *Joubert*.

Le niveau marin de *Catharina-Poissonnière* a donc une extension superficielle considérable [1]. Son isolement à la base de la zone à *Lonchopteris Bricei* lui donne un intérêt tout spécial. Un caractère de ce niveau, c'est qu'il surmonte une bande de terrains de 100^m à 150^m d'épaisseur renfermant de nombreuses passées, mais pas de veine exploitable.

PALÉONTOLOGIE. — *Sur le rôle des chenaux maritimes nord-floridien et sud-caraïbien dans les migrations des Mammifères tertiaires et quaternaires.* Note de M. L. **Joleaud**, présentée par M. Émile Haug.

Les migrations des Mammifères d'Europe, d'Afrique et d'Amérique m'ont permis de reconstituer partiellement l'histoire de l'Atlantique central au Néogène [2]. Les régressions et les transgressions qui ont favorisé ou arrêté ces échanges fauniques sont évidemment synchroniques des déplacements de la Méditerranée. Celle-ci communiquait avec l'Océan par les détroits nord-bétique et sud-rifain, remplacés plus tard par le détroit de Gibraltar. L'évolution géologique de ces chenaux a été magistralement élucidée par les belles explorations de Louis Gentil [3].

Les mouvements épirogéniques qui ont déterminé ces phénomènes ont eu leur répercussion dans la mer des Antilles. Les Quadrupèdes des États-Unis et de l'Argentine, qui comptaient au Montien des types communs, sont ensuite restés différents jusqu'au Pliocène. Les chenaux qui séparaient alors les deux Amériques n'occupaient pas l'emplacement de ceux qui encadrent anjourd'hui les Antilles. Un *détroit nord-floridien* était situé entre la Caroline, la Louisiane et la Floride. Un *chenal sud-caraïbien* qui s'avançait au sud de la chaîne caraïbe des Guyanes et du Vénézuela, correspondait à la plaine des Llanos [4].

---

[1] D'après W.-C. Klein, *Catharina* serait représentée en Belgique par la veine *Grand-Bac*, du bassin de Liége.

[2] *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 177, 310, 412.

[3] *Notice sur les titres et travaux scientifiques* de Louis Gentil, Paris, E. Larose, p. 55-57.

[4] Osborn (*The Age of Mammals*, 1910, p. 245, figure) indique un détroit (?) au sud de la chaîne Caraïbe : la plaine des Llanos dessine une avancée dans le haut Portuguesa, entre cette chaîne et la cordillère de Meridia, en face de la dépression de Barquisimato, au voisinage de laquelle les plis se rebroussent.

Le détroit nord-floridien était fermé lors du dépôt de la série du Grand Gulf : le golfe du Mexique ne communiquait pas alors avec l'Océan et la Floride était soudée aux Bahamas et aux Antilles (1). Peut-être une liaison continentale plus ou moins directe s'établit-elle ainsi entre les deux Amériques (2). Grâce à elle, put arriver jusqu'à l'Orégon un Édenté de la Plata, *Megalonyx* (3), dont les restes ont été trouvés dans les « Mascall beds ». Ces formations, généralement rapportées au Vindobonien, renferment un Équidé, *Kalobatippus gracilis*, qui, plus petit que les *K. præstans* et *agatensis* aquitaniens, remonterait au début du Néogène (4); peut-être en serait-il de même du *Megalonyx* de l'Orégon. *Kalobatippus* a émigré de la côte pacifique au Mississipi, à l'Aquitanien, puis en Europe, par l'Atlantique central, au Burdigalien. Il est possible que *Megalonyx* se soit déplacé vers la même époque en sens inverse, du Brésil à l'Orégon par les Antilles et la Floride. Les chenaux sud-caraïbien et nord-floridien auraient donc été partiellement émergés vers l'Aquitanien.

Cette émersion, assez localisée sans doute, semble s'être produite dès l'Oligocène. Car le genre *Solenodon*, aujourd'hui propre à Cuba et Haïti, est voisin de types sannoisiens nord-américains, *Apternodus* et *Micropternodus*. Ce groupe d'Insectivores, disparu du territoire des États-Unis dès le Tongrien supérieur, aurait trouvé un refuge aux Antilles. Mais *Solenodon* est aussi apparenté aux Centétidés du Congo et de Madagascar; une communication assez directe entre Cuba et l'Afrique occidentale aurait donc existé au Rupélien, lorsqu'arrivait à Madagascar la faune européenne et nord-américaine.

La grande transgression géosynclinale helvétienne dut déterminer la rupture de cette liaison continentale, qui fut rétablie partiellement peut-être dès le Tortonien, sûrement au Pontien et complètement au Pliocène. Par les Antilles soudées aux Guyanes, des Édentés pénétraient en Floride et au Texas, en même temps que des Mammifères nord-américains arrivaient dans la Néogée : les Procyonidés, qui vivaient au Pontien dans le Nebraska, et *Amphycion*, qui débutait dans l'Amérique du Nord au Burdigalien, parvenaient au Pliocène en Argentine.

---

(1) Hilgard, *Proc. Amer. Assoc.*, vol. 20, *Indianopolis*, 1872, p. 222.
(2) Scharff, *Amer. Natural*, vol. 43, 1909, p. 513-531.
(3) Sinclair, *Univ. Cal., Bull. Dept. Geol.*, vol. 5, n° 2, 1906, p. 65-69.
(4) Osborn, *Mém. Amer. Mus. Nat. Hist.*, New ser., vol. 2, 1re part., 1918, p. 69 et fig. 51.

De ces migrations entre les deux Amériques subsistent des traces dans la faune quaternaire et actuelle des Antilles, comme demeurent, au Pléistocène et aujourd'hui, des animaux européens ou africains dans les îles de la Méditerranée. Mais tandis qu'en Corse, en Sardaigne, etc., dominent des formes de petite taille, aux Antilles se sont maintenus des types de fortes dimensions, de gros Rongeurs, *Capromys* et *Plagiodontia*, originaires de la Néogée, un Muridé géant, *Moschomys*, et de grands Insectivores, *Solenodon*, provenant de l'Amérique du Nord. Au Pléistocène, la faune de Cuba comptait un Edenté gigantesque, *Megalocnus cubensis* Pomel, celle d'Anguilla et de Saint-Martin, un Rongeur, *Amblyrhiza*, de la taille d'un Ours ([1]).

La faune quaternaire et actuelle des Antilles aurait été affectée par le gigantisme, celle des îles méditerranéennes par le nanisme. La première, à faciès surtout sud-américain, était arrivée, à la fin du Tertiaire, à un stade plus avancé que la seconde, à caractère un peu éthiopien. Le milieu insulaire serait ainsi également favorable à la conservation des formes naines primitives et, par suite, insuffisamment spécialisées, comme des types géants très évolués et, en conséquence, spécialisés à l'excès.

Les changements survenus pendant le Néogène au tracé des chenaux nord-floridien et sud-caraïbien semblent donc avoir été synchroniques de ceux qui ont affecté leurs symétriques, les détroits nord-bétique et sud-rifains. La cordillère des Antilles qui, partant des sierras du Honduras, passe par la Jamaïque, Haïti, Port-au-Prince, les Petites Antilles, la Trinité, et va rejoindre la chaîne Caraïbe dans le Vénézuela, dessine une courbe convexe vers l'Est, tandis que sa symétrique la guirlande Cordillère-bétique-Riff est fermée vers l'Ouest : l'une comme l'autre enveloppent un effondrement en « ovale méditerranéen ».

PHYSIOLOGIE. — *Ventilation pulmonaire et hématose.*

Note ([2]) de M. **Jules Amar**, présentée par M. Edmond Perrier.

On a vu, précédemment ([3]), que la ventilation pulmonaire augmente très vite sous l'influence de l'exercice, et décroît lorsqu'on revient au repos.

([1]) Della Torre, *Congr. Géol. intern.*, 11e sess., Stockholm, 1910, 2e fasc., p. 1023. — Spencer, *Geol. Mag.*, t. 7, 1910, p. 512.

([2]) Séance du 5 mai 1919.

([3]) *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 828.

Il faut encore mentionner qu'elle réalise dans les meilleures conditions le phénomène intime de la respiration, à savoir l'oxygénation du sang, l'hématose.

Par quel mécanisme la ventilation pulmonaire favorise-t-elle l'hématose, c'est ce que l'expérience et la théorie vont nous expliquer.

1° *La ventilation pulmonaire augmente bien plus par l'amplitude que par la fréquence des respirations.* — Lorsqu'on effectue un travail de plus en plus grand, on trouve que les courbes respiratoires (tonogrammes) deviennent de plus en plus profondes. Leur *amplitude* progresse régulièrement.

Par contre, leur *fréquence*, même dans les grandes fatigues, atteint aussitôt sa limite extrême; elle n'obéit à aucune progression régulière.

Il y a plus : si l'on impose de respirer à des fréquences différentes, on vérifie que :

Dans le même temps, les respirations lentes et profondes mobilisent plus d'air dans les poumons que les respirations précipitées.

Voici la démonstration de ces trois faits :

a. Durant 10 minutes, on pédale sur le cycle à frein, à des vitesses variant par 10 tours depuis 90 jusqu'à 190 à la minute, et sous une résistance de 1^{kg}.

Le graphique des respirations montre que le rythme de ces dernières ne dépasse pas 40 et tend à se fixer, mais leur amplitude s'élève en fonction de la fatigue.

b. En employant une résistance double, et des vitesses comprises entre 132 et 208 tours, le résultat reste semblable; la profondeur des tonogrammes atteint 2 à 6 fois sa valeur initiale (du repos). Et ceux-ci finissent par être brusques, leurs branches se rejoignant par des raccords courbes; c'est-à-dire que l'expiration et l'inspiration cessent d'être parfaitement délimitées. La régularité de la respiration est menacée dès la vitesse de 210 tours (70 coups de pédale).

c. On marche pendant 25 minutes à la vitesse de 210 tours, avec 3^{kg} au frein. L'amplitude des tonogrammes est alors un maximum. Porter la fatigue plus loin ne ferait que réduire l'*amplitude respiratoire et déterminer l'essoufflement :* l'organisme ne se défendrait plus.

d. Enfin, on règle *volontairement* sa respiration de repos suivant les rythmes rapides de 30, 78, 96 et 108 par minute. Malgré cette précipitation, les volumes d'air correspondants sont de 8^{l}, 10^{l}, 11^{l} et 18^{l} environ. L'abdomen a la plus large, sinon l'unique part dans ce type de respiration.

Ralentissons le rythme, au contraire, en l'amenant à 23, à 14, puis à 9. Les débits seront, respectivement : $14^{l},30$, $18^{l},60$ et $27^{l},25$ par minute. Le type respiratoire est, dans ces conditions, à prédominance thoracique.

En conséquence, la quantité d'air qui passe par les poumons augmente avec la lenteur et la profondeur des respirations. La fréquence n'y apporterait pas une compensation équivalente. Il reste à dire *pourquoi*.

2° *Les respirations lentes et profondes favorisent l'oxygénation du sang.* — Or, par cela même que les respirations lentes et profondes introduisent un grand volume d'air, à concentration d'oxygène à peu près constante, il s'ensuit que ce dernier gaz pénètre dans le sang en proportion de la surface pulmonaire offerte aux échanges.

Il est clair que cette surface se développera aux dépens des alvéoles, qui s'ouvrent *peu à peu*, réalisant une série de cavités remplies d'air. La *surface relative* est, comme on sait, plus étendue dans le cas de ces petits volumes que dans celui d'une grande cavité unique. Car elle varie suivant le *carré du rayon* de la capacité pulmonaire, et les volumes suivant le *cube*.

L'intensité des échanges respiratoires s'accroît donc en raison de l'augmentation relative de la surface, laquelle s'exprime par le rapport des rayons [1]. De là, cette amplitude et cette longue durée des respirations de fatigue; de là aussi, à mesure que l'animal évolue et doit dépenser de la puissance, le cloisonnement progressif de ses poumons, simples poches chez le Protée ou le Triton, véritable ballon à cellules chez le Mammifère.

L'expérience confirme la théorie.

a) On a obtenu, au repos, une ventilation de 10^l par minute, et 22,5 respirations. Les taux d'échanges ont été :

$$CO^2 = 2,70 \text{ pour } 100, \quad O^2 = 3,40 \text{ pour } 100, \quad \frac{CO^2}{O^2} = 0,79.$$

On fait, ensuite, 150 mouvements de flexion et extension des bras, à la cadence de 100. Respirations = 26. Gaz recueillis, rapportés à la minute :

$$\text{Ventilation} = 25^l,50, \quad CO^2\,\% = 3,90, \quad O^2\,\% = 4,50, \quad CO^2/O^2 = 0,857.$$

Les volumes par respiration ont donc été :

$$\text{Repos : } \frac{10^l}{22,5} = 0^l,44; \qquad \text{Exercice : } \frac{25^l,50}{26} = 0^l,98.$$

Et l'intensité des échanges a dû augmenter comme $\sqrt[3]{\frac{0,98}{0,44}} = 1,30.$

---

(1) Ce rapport $\frac{r}{r'}$ peut s'écrire $\sqrt[3]{\frac{r^3}{r'^3}}$ ou $\sqrt[3]{\frac{v}{v'}}$, en remplaçant les cubes des rayons par les volumes d'air correspondant à chacune des respirations, lente et rapide.

Il est ainsi aisé de vérifier, en effet, que le taux d'oxygène, d'abord égal à 3,40, est devenu 4,50, ce qui est à peu près la valeur calculée :

$$3,40 \times 1,30 = 4,42.$$

b) Une seconde expérience a fourni les éléments ci-après :

	Ventilation.	Respiration.	$\frac{CO^2}{O^2}$.
Au repos.........	$9^l,50$	24	$\frac{3,60}{4,60} = 0,782$
A l'exercice.......	$19^l,00$	26	$\frac{4,40}{5,50} = 0,80$

D'où : $\frac{9,50}{24} = 0^l,40$, $\frac{19}{26} = 0^l,73$ et $\sqrt[3]{\frac{0,73}{0,40}} = 1,22$.

Et l'on a : $4,60 \times 1,22 = 5,612$ (valeur observée : 5,50).

Si l'on trouble l'automatisme nerveux, la loi des échanges cesse d'être observée.

c) En effet, on respire, *au repos*, tantôt sur le rythme précipité de 108, tantôt sur celui, très lent, de 9 par minute. Et l'on a :

Respirations.	Ventilation.	CO^2 pour 100.	O^2 pour 100.	$\frac{CO^2}{O^2}$.
108.........	$19^l,25$	1,80	2,40	0,75
9.........	$27^l,75$	3,60	4,90	0,74

Par suite :

$$\frac{19,25}{108} = 0^l,178, \quad \frac{27,75}{9} = 3^l,083 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{\frac{3,083}{0,178}} = 2,58.$$

Or $2,58 \times 2,40 = 6,20$ au lieu de 4,90.

Les respirations très fréquentes sont donc impropres à l'hématose ; elles fournissent un taux d'oxygène insuffisant et ne satisfont pas à la loi des échanges.

Du reste, elles sont un signe de l'essoufflement.

Et l'on aboutit à cette nouvelle conclusion :

L'hématose exige que la respiration développe, en toutes circonstances, un maximum de capacité pulmonaire..

GÉOGRAPHIE ZOOLOGIQUE. — *Sur la faune ichthyologique du Sahara oriental.* Note de M. **Jacques Pellegrin**, présentée par M. Edmond Perrier.

Contrairement à ce que l'on est tenté au premier abord de supposer pour des régions sablonneuses et presque en totalité aujourd'hui désertiques, il existe encore une faune des eaux douces du Sahara. En effet, si l'on s'en tient aux seuls Vertébrés, on constate que plusieurs espèces de Poissons, de Batraciens et quelques Reptiles aquatiques, derniers reliquats d'une population jadis beaucoup plus abondante, ont pu se maintenir dans certaines stations privilégiées, et cela non seulement, comme le fait a été signalé depuis longtemps, dans les sources des oasis, dans les chotts, dans les gouffres ou bahrs de la lisière sud de l'Atlas, mais même dans diverses autres localités explorées plus récemment des parties centrales (Touat, Tidikelt, Tassili des Azdjers) ou occidentales (Adrar, Tagant). C'est ainsi que dans une liste récapitulative donnée il y a quelques années [1] j'ai pu réunir un total de 21 espèces : 2 Reptiles, le Crocodile du Nil (*Crocodilius niloticus* Laur.), une Tortue, l'Emyde lépreuse (*Clemmys leprosa* Schw.), 8 Batraciens répartis en 4 genres et 4 familles et 11 Poissons appartenant à 7 genres et 4 familles. Toutefois l'ensemble de ces formes provenait uniquement soit du Nord et du Centre, soit de quelques points de l'Ouest du « Grand désert », aucun Vertébré aquatique n'avait encore été recueilli dans le Sahara oriental. Les récentes investigations du lieutenant-colonel Tilho dans les massifs montagneux du Tibesti et de l'Ennédi et dans le seuil du Borkou qui les réunit, viennent heureusement combler cette lacune et montrer que, là aussi, les Poissons ne font pas défaut.

La famille des Cyprinidés est représentée par trois espèces, un Labéon et deux Barbeaux : le *Labeo horie* Heckel, forme nilotique que le lieutenant-colonel Tilho a retrouvé dans la mare de Tottous (Tibesti), le *Barbus deserti* Pellegrin que j'ai fait connaître [2] d'après des exemplaires recueillis par le capitaine Cortier dans le Tassili des Azdjers et qu'il n'est pas très étonnant de voir étendre son habitat jusqu'à la mare d'Archei (Ennédi), le *Barbus anema* Boulenger, pêché dans la mare de Tottous (Tibesti), espèce minuscule du Nil appartenant au groupe paradoxal des Barbillons sans barbillons.

---

(1) J. Pellegrin, *Les Vertébrés aquatiques du Sahara* (*Comptes rendus*, t. 153, 1911, p. 972, et *C. R. Assoc. fr. Avanc. Sc.*, 1913, p. 346).

(2) *Bull. Mus. Hist. nat.*, 1909, p. 239.

La famille des Siluridés ne compte qu'un représentant, pris aussi dans la mare de Tottous, l'Harmouth lazera (*Clarias lazera* C. V.), Poisson à vaste distribution géographique, connu de Syrie, du Nil, du Tchad, du Sénégal et du Congo et qui doit à l'appareil arborescent spécial annexé à ses branchies la faculté de pouvoir résister assez longtemps à la privation d'eau.

Les Cichlidés figurent avec trois espèces : l'Hemichromis à deux taches (*Hemichromis bimaculatus* Gill) signalé comme assez rare à Ounianga Serir (Borkou), mais très commun en Afrique depuis le Nil jusqu'au Congo et particulièrement dans les oasis du Sud-Algérien, la Tilapie de Zill (*Tilapia Zilli* Gervais) rencontrée à la fois dans l'Ennédi et le Tibesti et qui habite la Syrie, le Nil, le Tchad, le Niger et le Sahara algérien, enfin une espèce nouvelle pour la science, la Tilapie du Borkou (*Tilapia borkuana* nov. sp.) assez voisine d'une forme très cosmopolite, la Tilapie de Galilée (*Tilapia galilœa* Artédi), mais qui s'en distingue toutefois par son corps plus allongé, son œil plus grand, ses épines de la nageoire dorsale plus faibles. D'après le lieutenant-colonel Tilho, l'abondance de ce Poisson, gros comme une petite Perche, serait grande à Ounianga Serir dont il provient, puisque 20^{kg} ont pu être récoltés en une heure, au moyen d'une nasse.

Ce premier aperçu sur la faune ichthyologique du Tibesti, du Borkou et de l'Ennédi fournit un total de 7 espèces, réparties en 5 genres et en 3 familles; 1 étant nouvelle et 3 n'ayant pas encore été signalées dans le Sahara (*Labeo horie*, *Barbus anema*, *Clarias lazera*), le nombre des Poissons actuellement connus de cette partie de l'Afrique se trouve ainsi porté de 11 à 15.

En second lieu, on doit constater que toutes les espèces du Sahara oriental ont un caractère nettement africain, appartiennent sans exception à la faune éthiopienne proprement dite. On ne retrouve plus là, comme dans le Sahara algérien ou même dans le Tassili des Azdjers, des formes paléarctiques, méditerranéennes (*Cyprinodon*, *Barbus biscarensis* Boulenger), associées aux espèces africaines.

Les Poissons rapportés par le lieutenant-colonel Tilho sont en général nilotiques ou à distribution géographique des plus vastes comprenant à la fois le Nil et l'Afrique occidentale. Quant à la forme spéciale, la Tilapie de Borkou, elle peut être dérivée par ségrégation de la Tilapie de Galilée qui rentre dans la catégorie des espèces à habitat très étendu.

Les massifs montagneux du Sahara oriental et le Borkou constituent les derniers refuges d'une faune aquatique autrefois beaucoup plus riche et aujourd'hui en voie de disparition. Les nombreux dépôts de coquilles de Mollusques fluviatiles et les quantités d'ossements de Poissons qu'on

rencontre dans ces régions et dans les parties avoisinantes en sont le témoignage indéniable. Un fragment de crâne et des vertèbres recueillis par la mission Tilho dans l'oued Dira (Egueï), à mi-distance entre le Tchad et le Borkou, me semblent devoir être rapportés à un spécimen de Perche du Nil (*Lates niloticus* L.) d'environ 2^m de longueur. Par cet exemple, on peut juger de l'importance des cours d'eau qui sillonnaient jadis ces contrées et qui pouvaient servir d'habitat à des Poissons aussi énormes.

EMBRYOLOGIE. — *Les premières phases du développement embryonnaire chez* Leander squilla *Fabricius*. Note de M. E. **Sollaud**, présentée par M. Yves Delage.

Nos connaissances sur le développement embryonnaire des *Palæmonidæ* reposent essentiellement sur les travaux, devenus classiques, de Bobretzky [1]. Mes recherches, qui ont porté principalement sur *Leander squilla* Fabr., espèce fort commune sur nos côtes, m'ont permis de préciser ou de rectifier un certain nombre de points et de reconnaître quelques faits importants relatifs aux premières phases de l'ontogénie.

L'œuf est du type centrolécithique, mais le vitellus n'y est pas exactement centré : il est un peu plus abondant du côté de la future face ventrale et le noyau, un peu excentrique, est plus rapproché de la future face dorsale. Les deux premiers sillons de segmentation semblent apparaître presque simultanément, divisant l'œuf en quatre blastomères égaux, munis chacun d'un noyau entouré d'une masse protoplasmique étoilée. Les limites des blastomères n'atteignent pas le centre de l'œuf; à aucun moment la segmentation n'est vraiment totale. Toutes les divisions nucléaires se faisant parallèlement à la surface, les blastomères se disposent d'emblée en une assise périphérique de *pyramides vitellines* rayonnantes, de plus en plus nombreuses et étroites, dont la partie profonde se confond avec la masse centrale, indivise, du vitellus; au fur et à mesure que la segmentation progresse, les noyaux se rapprochent de la surface, et les limites des pyramides s'effacent graduellement, du centre vers la périphérie; elles disparaissent lorsque protoplasma et noyaux, s'isolant des réserves vitellines sous-jacentes, viennent finalement s'étaler à la surface pour constituer le blastoderme.

---

[1] N. Bobretzky, *Sur l'embryologie des Arthropodes* (*Mém. Soc. des Naturalistes de Kiew*, t. III, 1873) [en russe].

Aucun élément cellulaire ne reste dans la masse centrale du vitellus pour s'y transformer directement en vitellophage.

La segmentation est légèrement inégale : dès les stades à 16 ou 32 blastomères, on reconnaît plus ou moins nettement un pôle à micromères, dorsal, et un pôle à macromères, ventral. Dès que les masses protoplasmiques nucléées contenues dans les macromères (ou pyramides vitellines ventrales) ont atteint la surface, leur chimisme se modifie, peut-être sous l'effet d'oxydations plus intenses; un plus ou moins grand nombre de ces éléments s'enfoncent à nouveau dans le vitellus, à l'intérieur duquel ils vont se déplacer, par des mouvements amiboïdes, tout en le digérant : ce sont les premiers vitellophages.

Ce phénomène n'est pas tout d'abord étroitement localisé; il peut se produire sur une surface plus ou moins étendue de la région ventrale; mais bientôt on le voit se manifester d'une façon particulièrement intense en un point spécial, où les noyaux se multiplient très activement et abandonnent la surface pour émigrer dans la profondeur. En ce point apparaît un léger enfoncement, bien marqué, mais de dimensions très restreintes, et que l'on peut qualifier de blastopore. Le fond et les parois de cette dépression sont le siège d'une abondante prolifération, les éléments nouvellement formés étant l'origine de l'entoderme et du mésoderme; on peut donc bien parler d'une imagination mésentodermique; mais, contrairement à l'assertion de Bobretzky, il n'y a pas formation d'une véritable cavité gastrulaire se fermant par rapprochement des bords de l'ouverture. La prolifération donne d'abord naissance à de nombreux vitellophages qui se dispersent immédiament dans l'épaisseur du vitellus; mais bientôt elle aboutit à la formation d'un massif cellulaire plein, dont la partie antérieure s'étend sous l'ectoderme, en avant du blastopore, pour constituer le mésoderme de l'embryon nauplien. Dès que la période active de pénétration des vitellophages est terminée, la petite dépression superficielle s'efface rapidement et ne tarde pas à disparaître [1]. On sait, depuis Bobretzley, que les vitellophages viennent finalement se disposer autour du vitellus, en une assise cellulaire endodermique, qui représente le mésentéron.

---

[1] Roule a décrit chez *Leander serratus* (*Ann. Sc. nat. Zool.*, 8e série, t. II, 1896) une segmentation du type discoïdal, se faisant à partir d'une petite cicatricule superficielle où tout le protoplasma serait concentrée au début; il n'y aurait aucune trace d'invagination mésentodermique. Or, dans les œufs considérés par cet auteur comme étant au début de leur développement, non seulement la segmentation était achevée,

Peu après l'apparition du blastopore, lorsque les dernières pyramides vitellines ont disparu, on assiste à un curieux phénomène de migration cellulaire : la plupart des éléments ectodermiques du pôle supérieur se mettent en mouvement; ils progressent rapidement à la surface du vitellus, à la façon d'éléments amiboïdes, et, tout en se divisant en cours de route, se dirigent vers la face inférieure. Cette migration est sans doute le résultat d'un chimiotactisme particulier, mis en jeu par la digestion active des matériaux vitellins au point de pénétration des vitellophages. Le noyau semble diriger le mouvement en entraînant à sa suite la masse protoplasmique, qui s'étire en une longue bande rubanée; sur des œufs fixés au moment propice et colorés en masse, ces traînées protoplasmiques donnent l'impression d'un système de lignes de forces convergeant vers la région blastoporique. Bientôt il ne subsiste plus, à l'opposé du blastopore, qu'un petit nombre de noyaux épars.

Sur la face ventrale s'est effectuée, par prolifération locale, et surtout par l'apport de nouveaux éléments, une importante concentration cellulaire, où commencent à se manifester les véritables processus morphogènes : immédiatement en avant du blastopore s'individualisent deux bandes, qui divergent comme les deux branches d'un V, et où se dessinent peu à peu les organes pairs de l'embryon nauplien (lobes ophthalmiques, antennes I, antennes II, mandibules, avec les ganglions correspondants). A l'extrémité postérieure de l'ébauche nauplienne, au niveau même où s'était faite l'invagination mésentodermique, il existe un amas cellulaire très dense, dont les matériaux serviront à édifier les tissus ecto- et mésodermiques de la portion métanauplienne du corps. Les éléments ectodermiques qui avaient subsisté sur la face dorsale se multiplient et prennent part à la formation de l'épiderme de la région thoracique.

---

mais le blastopore avait déjà disparu; la prétendue cicatricule originelle n'est autre chose que le petit massif cellulaire qui s'est constitué sur l'emplacement du blastopore; le protoplasma n'est pas tout entier concentré en ce point, puisque le vitellus est enveloppé de cellules ectodermiques, et que des éléments endodermiques (vitellophages) sont disséminés dans sa masse.

BIOLOGIE. — *Sur la pigmentation des alevins du Saumon* (Salmos salar *L.*), *et sur ses relations avec le premier séjour en rivière et la première migration à la mer*. Note de M. **Louis Roule**, présentée par M. Edmond Perrier.

On peut distinguer cinq périodes successives dans le développement de ces alevins, depuis l'éclosion jusqu'à la migration de descente à la mer : 1° la *période vésiculée*, pendant laquelle la vésicule vitelline existe, tout en se résorbant et en diminuant de façon progressive; 2° la *période nue*, qui commence de suite après la résorption complète, et se caractérise par la privation d'écailles apparentes; 3° la *période écailleuse*, pendant laquelle les écailles sont présentes; 4° la *période de transposition pigmentaire*, où la coloration se modifie pour aboutir aux dispositions de la livrée migratrice; 5° la *période migratrice*, au cours de laquelle les alevins, parvenus à l'état de Tacons, descendent les rivières pour se rendre à la mer.

L'ensemble de ces périodes embrasse ordinairement, dans les divers bassins hydrographiques que fréquente le Saumon dans notre pays, une durée de deux années; une minorité seule descend à la mer après une année de vie en rivière; une minorité encore plus restreinte demeure trois années en eau douce avant d'effectuer sa descente. La première période comprend habituellement deux à trois mois, depuis le mois de février, qui est le plus souvent celui de l'éclosion dans la nature, jusqu'au mois de mai de la première année. La deuxième période s'étend sur les cinq ou six semaines consécutives, et va jusqu'en juin. La troisième période, la plus longue, commence ensuite, et se maintient jusqu'au cours de l'hiver qui précède la descente, c'est-à-dire dix-huit à vingt mois dans le plus grand nombre des cas. Enfin la quatrième et la cinquième périodes précèdent immédiatement la migration, qui s'effectue vers la fin de la mauvaise saison, et, d'habitude, dans le courant du mois d'avril.

La pigmentation, au moment de l'éclosion, est faible; elle consiste en un petit nombre de fines ponctuations disséminées sur la tête et le tronc, dans la région dorsale. Elle devient plus intense pendant la première période; d'une part, les ponctuations se rendent plus abondantes et plus serrées, tout en gagnant les flancs, et empiétant partiellement sur la région ventrale; d'autre part, des taches prennent naissance le long de la ligne latérale, où elles se disposent sur une file. Cette accentuation de l'intensité pigmentaire augmente pendant la deuxième période et le début de la troi-

sième. L'alevin, dans la nature, acquiert une teinte très foncée; les ponctuations, nombreuses et serrées, couvrent le corps presque entier, sauf une faible partie de la face inférieure de la tête et de la région antérieure de l'abdomen; les taches ne se bornent point aux deux rangées latérales, mais occupent aussi la moitié dorsale du corps. Ces diverses productions sont uniformément constituées par un pigment de couleur gris brun. Les choses demeurent en cet état pendant la durée de la troisième période.

Il n'en est plus de même dans la période de transposition. Deux actions différentes se manifestent alors de façon synchrone. L'une d'elles consiste dans la disparition de la plupart des ponctuations et des taches précédentes, sauf vers la région dorsale, où la teinte s'uniformise. L'autre réside en l'apparition d'un pigment nouveau, de nuance gris bleuâtre assez claire, qui se dispose sur les flancs, le long de la ligne latérale, sous la forme de grandes taches aux contours d'abord diffus, ensuite nets et précis. Il résulte de ces deux modifications concomitantes que la teinte générale des alevins devient notablement moins foncée, que la région ventrale se fait entièrement blanche, et que la pigmentation principale est désormais constituée par les taches bleuâtres latérales. Ces changements ont pour résultat d'aboutir à l'état bien connu de livrée migratrice. C'est lorsque cet état est réalisé que l'alevin accomplit sa migration de descente et se rend à la mer.

On doit remarquer, à ce propos, que la migration s'effectue seulement après l'apparition de cette livrée, non pas auparavant, et cela quel que soit l'âge de l'alevin, un an, deux ans ou trois ans, marqué par ses écailles. Un changement de cette sorte doit influer nécessairement sur le mode d'absorption des radiations lumineuses par les téguments. Le pigment brun et abondant, qui forme écran pendant les périodes de la vie en rivière, sert aux alevins, sans doute, pour résister à l'action de la vive lumière du milieu terrestre et des ruisseaux où ils se trouvent alors. Il est intéressant d'observer que l'atténuation de ce pigment concorde avec la recherche d'une eau plus profonde, qui conduit progressivement l'individu aux rivières principales d'abord, au milieu marin ensuite, où il va d'emblée dans les zones abyssales et presque aphotiques. On serait donc en droit de présumer que la migration de descente, en tant que cause immédiate principale, pourrait relever d'un cas de phototropisme négatif.

A 16 heures et quart l'Académie se forme en Comité secret.

COMITÉ SECRET.

La Section de Géométrie, par l'organe de son Doyen, présente la liste suivante de candidats à la place vacante par suite de l'élection de M. *Émile Picard* comme Secrétaire perpétuel :

En première ligne	M. **Émile Borel**
En seconde ligne.	M. **Édouard Goursat**
En troisième ligne, ex æquo, par ordre alphabétique. . . . . ,	MM. **Elie Cartan** **Jules Drach** **Henri Lebesgue** **Ernest Vessiot**

Les titres de ces candidats sont discutés.

L'Académie, à l'unanimité des suffrages, adjoint M. **Claude Guichard** à la liste de présentation.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

La séance est levée à 18 heures.

É. P.